PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE MAT1630
FACULTAD DE MATEMATICAS I1-1er. Semestre

Interrogación 1 de Cálculo III

1. **Ejercicio**

   (a) Determinar si existe $k > 0$ tal que el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^k}{x-y^2}$ exista.

   Solución: En los puntos del dominio de la recta $x = 0$ la función vale 0, por lo tanto de existir el límite, este tiene que ser 0.
   Supongamos que tal k existe y consideremos la curva $x = y^2 + y^{k+2}$. Se tiene que $\lim_{y\to 0}(y^2 + y^{k+2}) = 0$, entonces se debería cumplir que $\lim_{y\to 0} \dfrac{(y^2+y^{k+2})y^k}{y^{k+2}} = 0$, pero este límite es 1. Vemos así que no existe un tal k.

   (b) La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$, prolongada por 0 en el origen, ¿es continua, diferenciable, de clase C^1?

   Solución: Es claro que en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ la función es de clase $\mathcal{C}^\infty$ por lo tanto fuera del origen la función es continua y diferenciable. Notar que

   $$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{xy^2}{2xy}\right| = \frac{|y|}{2}.$$

   En consecuencia $\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ tiende a 0 si $(x, y) \to (0, 0)$ y f es continua en todas partes.
   Analicemos la diferenciabilidad en $(0, 0)$. f es diferenciable en $(0, 0)$ si

   $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

   $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$, análogamente $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.
   Por lo tanto, f sería diferenciable en $(0, 0)$ si

   $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} = 0$$

Considerando los puntos de la recta $h = k$ se tiene $\lim_{h\to 0} \frac{h^3}{(2h^2)^{3/2}} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{\sqrt[3]{4}|h^3|}$.
Como este límite no existe, vemos que f no es diferenciable en el origen.
Y obviamente f no es de clase $\mathcal{C}^1$ porque si lo fuera, sería diferenciable.

2. **Ejercicio.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 tal que

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

y considere

$$z(u, v) = e^u \cos(v) + f(u + v, u - v).$$

Determine el valor de $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}(u, v) + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}(u, v), \quad \forall\ (u, v) \in \mathbb{R}^2.$

Solución: Sea $x = u + v$, $y = u - v$.

Luego, utilizando la regla de la cadena, se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= e^u \cos(v) + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\
&= e^u \cos(v) + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}. \\
\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= e^u \cos(v) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u} \\
&= e^u \cos(v) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial v} &= -e^u \sin(v) + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\
&= -e^u \sin(v) + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}. \\
\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} &= -e^u \cos(v) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u} \\
&= -e^u \cos(v) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

De aquí

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(u,v) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(u,v) = 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right) = 0, \quad \forall\ (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

3. **Ejercicio.** Determinar los puntos críticos de la función $(x,y) \mapsto (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$ y precisar su naturaleza.

Solución: La función $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$ es un producto de funciones de clase C^∞ y admite entonces derivadas parciales continuas de cualquier orden. Se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = 2\left(x^2+y^2\right)xe^{\left(x^2-y^2\right)} + 2\,xe^{\left(x^2-y^2\right)} = 2x(1+x^2+y^2)e^{\left(x^2-y^2\right)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2\left(x^2+y^2\right)ye^{\left(x^2-y^2\right)} + 2\,ye^{\left(x^2-y^2\right)} = 2y(1-x^2-y^2)e^{\left(x^2-y^2\right)}.$$

De donde se deduce que estas derivadas se anulan ambas en el punto $(0,0)$. Examinemos qué tipo de punto crítico es $(0,0)$. Para ello calculamos las segundas derivadas.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4\left(x^2+y^2\right)x^2e^{\left(x^2-y^2\right)} + 8\,x^2e^{\left(x^2-y^2\right)} + 2\left(x^2+y^2\right)e^{\left(x^2-y^2\right)} + 2\,e^{\left(x^2-y^2\right)},$$

Luego, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$. Enseguida,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4\left(x^2+y^2\right)xye^{\left(x^2-y^2\right)},$$

Entonces, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4\left(x^2+y^2\right)y^2e^{\left(x^2-y^2\right)} - 8\,y^2e^{\left(x^2-y^2\right)} - 2\left(x^2+y^2\right)e^{\left(x^2-y^2\right)} + 2\,e^{\left(x^2-y^2\right)},$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2$. Es decir, la matriz Hessiana en el origen es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es 4 y como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$ es positiva, el punto crítico $(0,0)$ es un mínimo.

Si se considera los puntos de la forma $(0,y)$, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 2y(1-y^2)e^{-y^2}$ que es 0 si y sólo si $y = \pm 1$ ó 0. Luego, $(0,1)$ y $(0-1)$ son también puntos críticos. Analizando el valor de las segundas derivadas en $(0,y)$, se tiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,y) = 2(1+y^2)e^{-y^2};\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\pm 1) = 4e^{-1},$$

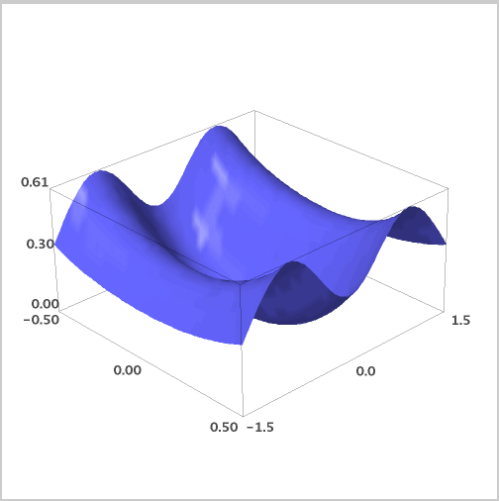
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,y) = (4y^4 - 10y^2 + 2)e^{-y^2};\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,\pm 1) = -4e^{-1},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,y) = 0;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,\pm 1) = 0.$$

La matriz Hessiana para los puntos críticos $(0,\pm 1)$ es entonces

$$\begin{pmatrix} 4e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{pmatrix},$$

y su determinante es negativo. Presenta dos valores propios de signo distinto, luego los puntos críticos $(0,\pm 1)$ corresponden a puntos silla y la función tiene sólo un mínimo en $(0,0)$ que es absoluto.



4. **Ejercicio.** Encontrar el polinomio de Taylor hasta el tercer grado de la función $f(x,y) = (x+y)^3$ en $(0,0)$ y en $(1,1)$.

Solución: Desarrollo de Taylor de tercer grado para $f(x,y) = (x+y)^3$ en torno a $(0,0)$ y $(1,1)$.

Observar que

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

es su propio polinomio de Taylor en tornon a $(0,0)$.

El Teorema de Taylor dice que la expansión de grado 3 en torno a (x_0, y_0) es

$$p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$+\frac{1}{2}\Big(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big) +$$
$$\frac{1}{6}\Big(f_{xxx}(x_0,y_0)(x-x_0)^3 + 3f_{xxy}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0) + 3f_{xyy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2 + f_{yyy}(x_0,y_0)(y-y_0)^3\Big)$$

Se tiene:

$$f_x = 3x^2+6xy+3y^2, \quad f_y = 3y^2+6yx+3x^2, \quad f_{xx} = 6x+6y, \quad f_{xy} = 6x+6y, \quad f_{yy} = 6x+6y,$$

$$f_{xxx} = 6, \quad f_{xxy} = 6, \quad f_{xyy} = 6, \quad f_{yyy} = 6.$$

Las derivadas parciales hasta el segundo orden valen 0 en $(0,0)$, y las de tercer orden valen todas 6, de donde sale que en torno a $(0,0)$,

$$p(x,y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

En $(1,1)$ se tiene

$$f_x = 12, \quad f_y = 12, \quad f_{xx} = 12, \quad f_{xy} = 12, \quad f_{yy} = 12,$$

$$f_{xxx} = 6, \quad f_{xxy} = 6, \quad f_{xyy} = 6, \quad f_{yyy} = 6,$$

y $f(1,1) = 8$, por lo que el polinomio pedido es

$$p(x,y) = 8 + 12(x-1) + 12(y-1) + 6(x-1)^2 + 12(x-1)(y-1) + 6(y-1)^2$$

$$+(x-1)^3 + 3(x-1)^2(y-1) + 3(x-1)(y-1)^2 + (y-1)^3$$