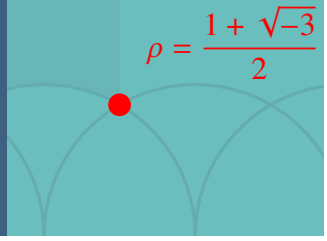
Cálculo III (MAT1630)

Francisco Solís, 2022-1

25/06/2022



Contenidos

1 Curvas **3**

2 Campos vectoriales e integrales de línea **9**

3 Campos vectoriales e integrales de superficies **15**

1 Curvas

Una función con valores vectoriales (función vectorial), es una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo rango es un conjunto de vectores. **r**(t) = < f(t), g(t), h(t) >. Si **r**(t) = <f(t), g(t), h(t) >, entonces:

$$\lim_{t\to\alpha} \mathbf{r}(t) =< \lim_{t\to\alpha} \mathbf{f}(t), \lim_{t\to\alpha} \mathbf{g}(t), \lim_{t\to\alpha} \mathbf{h}(t) >$$

siempre que existan los límites de las funciones componentes. Una función vectorial **r** es continua en a si : $\lim_{t\to\alpha} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\alpha)$.

Supongamos que f, g y h son funciones continuas de valores reales sobre un intervalo I. El conjunto C de todos los puntos (x,y,z) es el espacio donde:

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)$$

1.1: Ecuaciones paramétricas de C

y t varía en todo el intervalo I, se llama curva en el espacio.

Las coordenadas polares son:

$$x = rcos(\theta),\ y = rsen(\theta)$$
$$r^2 = x^2 + y^2$$

Además, se tiene que:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}^{'}(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(h)}{h}$$

Teorema

Si **r**(t) = < f(t), g(t), h(t) >, donde f, g y h son funciones derivables, entonces:

$$\mathbf{r}'(t) =< f'(t), g'(t), h'(t) >$$

Teorema

Suponga que u y v son funciones vectoriales derivables, c es un escalar y f es una función de valores reales, entonces:

1. $\frac{d}{dt}$ [u(t) + v(t)] = $u'(t) + v'(t)$
2. $\frac{d}{dt}$ cu(t) = $cu'(t)$
3. $\frac{d}{dt}$ [f(t)u(t)] = $f'(t)u(t) + f(t)u'(t)$
4. $\frac{d}{dt}$ [u(t)·v(t)] = u′(t)·v(t) + u(t)·v′(t)
5. $\frac{d}{dt}$ [u(t)×v(t] = u′(t)×v(t) + u(t)×v′(t)
6. $\frac{d}{dt}$ [u(f(t))] = f′(t)u′(f(t))

Se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

1.2: Pendiente de la recta tangente a una curva paramétrica

Teorema

Si una curva C se describe mediante las ecuaciones paramétricas x = f(t), y = g(t), $\alpha \leq t \leq \beta$, donde f′ y g′ son continuas sobre $[\alpha, \beta]$ y C es recorrida una sola vez cuando t aumenta desde α hasta β, entonces la longitud de C es:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt$$

Una forma más fácil de recordar esta fórmula es como:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} ||r'(t)||\ dt$$

Observación: Es lo mismo que pedir que r(t) debe ser inyectiva y $r'(t)$ debe ser continua.

Una parametrización **r**(t) es llamada suave sobre un intervalo I si r′ es continua y **r**(t) ≠ **0** sobre I. El vector tangente unitario **T**(t) está dado por:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{||\mathbf{r}'(t)||}$$

e indica la dirección de la curva.

Definición

La curvatura de una curva es:

$$\kappa = \left|\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|\right|$$

donde **T** es un vector tangente unitario (arcoparametrizado). Mide que tan rápido cambia la curva de dirección en ese punto. Es la magnitud de la razón de cambio del vector tangente unitario respecto a la longitud de arco.

$$\kappa = \frac{||T'(t)||}{||r'(t)||}$$

Teorema

La curvatura de la curva dada por la función vectorial **r** es:

$$\kappa = \frac{||r'(t) \times r''(t)||}{||r'(t)||^3}$$

El vector normal unitario principal **N**(t) o unitario normal es:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{||\mathbf{T}'(t)||}$$

El vector:

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

se llama vector binormal. El plano definido por los vectores normal y binormal **N** y **B** en un punto P en la curva C se llama plano normal de C en P. Está constituido por todas las rectas que son ortogonales al vector tangente **T**. El plano definido por los vectores **T** y **N** se llama plano osculador de C en P. Es el plano que está más cerca de contener la parte de la curva cerca de P.

La circunferencia que se localiza en el plano osculador de C en P tiene la misma tangente que C en P, se sitúa en el lado cóncavo de C, y su radio $\rho = \frac{1}{\kappa}$, se llama circunferencia osculadora de C en P. La longitud de arco de una curva con ecuación polar r = f(θ), a $\leq \theta \leq$ b es:

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Notas de la clase

Observación: Puede haber más de una parametrización para la misma curva

Ec paramétrica: P - r(t) = $\lambda r'(t)$.

Ec principal: y = mx + n

Observación: El largo de una curva no depende de la parametrización que uno escoja (siempre que la parametrización sea inyectiva y de clase C^1)

Observación: La parametrización por longitud de arco de una curva, permite recorrerla con rapidez constante igual a 1.

Observación: N(t) es ortogonal a T(t)

Definición (dada en clase)

Al largo de la curva entre r(a) y r(t) lo anotamos como

$$s(t) = \int_a^t ||r'(t)||dt$$

Dado que la función s(t) es biyectiva en el intervalo [0, L(C)], es decir, tiene inversa, la función toma un número s y le asigna t(s), un número en [a,b] tal que al evaluar r(t(s)) el largo de ese segmento es s.

Plano osculador

El plano osculador de la curva Γ en r(t), es el plano que pasa por r(t) y que está generado por N(t) y T(t). Contiene todas las rectas tangentes a r(t). El plano osculador se obtiene como:

$$((x, y, z) - r(t)) \cdot B(t) = 0$$

El plano normal se obtiene como

$$((x, y, z) - r(t)) \cdot T(t) = 0$$

Torsión de una curva (dada en clase)

Sea r: [a,b] $\Rightarrow R^3$ la parametrización en longitud de arco de una curva Γ. La torsión "mide" que tanto se tuerce una curva. Es decir, como cambia el plano osculador a medida que se avanza en la curva, o como cambia el vector binormal.

$$\frac{dB}{ds}(s) = \beta N(s) = \frac{dB}{ds}(s) = -\tau(s)N(s)$$

en donde la torsión de la curva Γ de r(s) es $\tau(s)$.

Si r: [a,b] $\Rightarrow R^3$ es una parametrización distinta a la de longitud de arco, la torsión de una curva en r(t) es

$$\tau(t) = \frac{(r'(t) \times r''(t)) \cdot r'''(t)}{||r'(t) \times r''(t)||^2}$$

Observación: Una curva es plana si y sólo si su torsión es 0 para cualquier valor de s.

Fórmulas de Frenet-Serret (parametrización en longitud de arco)

- $\frac{dT}{ds}(s) = \kappa\,(s)\mathrm{N}(s)$
- $\frac{dB}{ds} = -\tau(s)N(s)$
- $\frac{dN}{ds}(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$

Si la curva está arcoparametrizada, una forma de recordar estas fórmulas es:

$$\begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix}$$

Curvas importantes

Cardioide:

$$r = a \pm bcos(\theta) \text{ ó } r = a \pm bsen(\theta)$$

Cicloide:

$$x = r(t - sin(t))$$
$$y = r(1 - cos(t))$$

Continuidad

Decimos que la función vectorial r: $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es continua en a $\in$ I si

$$\lim_{t \to a} r(t) = r(a)$$

2

Campos vectoriales e integrales de línea

Definición

Sea D un conjunto en R^2. Un campo vectorial sobre R^2 es una función F que asigna a cada punto (x,y) en D un vector bidimensional F(x,y)

Definición

Sea E un subconjunto de R^3. Un campo vectorial sobre R^3 es una función F que asigna a cada punto (x,y,z) en E un vector tridimensional F(x,y,z).

$$\nabla f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\hat{\mathbf{i}} + f_y(x,y,z)\hat{\mathbf{j}} + f_z(x,y,z)\hat{\mathbf{k}}$$

Lo anterior corresponde al campo vectorial gradiente. Un campo vectorial F se denomina campo vectorial conservativo si es el gradiente de alguna función escalar, si existe una función f tal que F = ∇f

Definición

Si f se define sobre una curva C suave dada por las ecuaciones x = x(t), y = y(t) a $\leq t \leq b$, entonces la integral de línea de f a lo largo de C es:

$$\int_C f(x,y)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$$

si este límite existe.

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t),y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt$$

Definición

Sea **F** un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave C dada por una función vectorial **r**(t), $a \leq t \leq b$. Entonces la integral de línea de F a lo largo de C es:

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

Teorema

Sea C una curva suave definida por la función vectorial **r**(t), $a \leq t \leq b$. Sea f la función derivable de dos o tres variables cuyo vector gradiente ∇ f es continuo sobre C. Entonces:

$$\int_C \nabla \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = f(r(b)) - f(r(a))$$

Las integrales de línea de campos vectoriales conservativos son independientes de la trayectoria. Se dice que una curva es cerrada si su punto final conincide con su punto terminal.

Teorema

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

es independiente de la trayectoria en D si y sólo si

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

para toda trayectoria cerrada C en D.

Trabajo hecho por un campo de fuerzas conservativo, cuando se desplaza un objeto alrededor de una trayectoria cerrada es 0.

Teorema

Supongamos que F es un campo vectorial que es continuo sobre una región conexa abierta D. Si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D, entonces F es un campo vectorial conservativo sobre D, es decir, existe una función tal que ∇f = F

Conexa: dos puntos cualesquiera en D se pueden unir mediante una trayectoria que está en D.

Teorema

Si F(x,y) = P(x,y)$\hat{\mathbf{i}}$+ Q(x,y)$\hat{\mathbf{j}}$ es un campo vectorial conservativo, donde P y Q tienen derivadas parciales continuas de primer orden sobre un dominio D, entonces en la totalidad de D tenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en donde F = ∇f, por tanto

$$P = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$
$$Q = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

lo que escrito de otra forma es:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Teorema

Sea F = P$\hat{\mathbf{i}}$+ Q$\hat{\mathbf{j}}$ un campo vectorial sobre una región simplemente conexa D. Supongamos que P y Q tienen derivadas continuas de primer orden y $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en toda la región D. Entonces F es conservativo

Teorema de Green

Sea C una curva simple cerrada, suave por tramos con orientación positiva en el plano (recorrido sencillo de C sentido contrario manecillas del reloj), y sea D la región que delimita C. Si P y Q tienen derivadas parciales continuas sobre una región abierta que contiene a D, entonces:

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Notación

$$\oint_C Pdx + Qdy, \oint_C Pdx + Qdy$$

se usa para señalar que la integral de línea se calcula usando la orientación positiva de la curva cerrada C. Otra notación para la orientación positiva de D es ∂D. Entonces:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_{\partial D} Pdx + Qdy$$

Área de D: $A = \oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$.

Si F = P$\hat{\mathbf{i}}$+ Q$\hat{\mathbf{j}}$+ R$\hat{\mathbf{k}}$ es un campo vectorial sobre R^3 y existen las derivadas parciales de P, Q y R, entonces el rotacional de F es el campo vectorial sobre R3 definido por:

$$rot\ F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\boxed{rot\ F = \nabla \times F}$$

donde $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$

Teorema

Si f es una función de tres variables que tiene derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces rot(∇f) = 0. Si F es conservativo, entonces rot F = 0.

Teorema

Si F es un campo vectorial definido en todo R^3 cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas y rot F = 0, entonces F es un campo vectorial conservativo.

Si F = P$\hat{\mathbf{i}}$+ Q$\hat{\mathbf{j}}$+ R$\hat{\mathbf{k}}$ es un campo vectorial sobre R^3 y existen $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$, entonces la divergencia de F es:

$$div\ F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\boxed{div\ F = \nabla \cdot F}$$

Teorema

Si F = $P\hat{\mathbf{i}}+Q\hat{\mathbf{j}}+R\hat{\mathbf{k}}$ es un campo vectorial sobre R^3 y P, Q y R tienen derivadas parciales de segundo orden, entonces div rot F = 0.

El operador $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ se llama operador de Laplace.

$$\nabla^2 F = \nabla^2 P\hat{\mathbf{i}} + \nabla^2 Q\hat{\mathbf{j}} + \nabla^2 R\hat{\mathbf{k}}$$

Si consideramos el campo vectorial F = P$\hat{\mathbf{i}}$+ Q$\hat{\mathbf{j}}$, su integral de línea es:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_c P dx + Q dy$$

Formas vectoriales Teorema de Green

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (rot\ F) \cdot \mathbf{k}\ dA \qquad \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ ds = \iint_D div\ F(x,y)\ dA$$

donde **n** es el vector normal unitario.

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{||r'(t)||} \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}$$

El signo de n se escoge para hacer que corresponda a la dirección exterior (en lugar de la interior). Es decir, queremos que n en dirección contraria a la región D.

Teorema de Green (Mardsen y Pita Ruiz)

Se establece la siguiente igualdad entre una integral de línea y una integral doble:

$$\int_{\partial S^+} F \cdot d\lambda = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

donde F = (M(x,y),N(x,y)), S es una cierta región de $\mathbb{R}^2$ y ∂S^+ es la frontera de S positivamente orientada. El teorema de green es válido en regiones compactas. Diremos que C tiene orientación positiva, lo que se escribe como C^+, si en nuestro recorrido siempre vemos al conjunto U, interior a C, a nuestra izquierda. A veces, cuando ∂S^+ es la unión de un número finito de hoyos, es decir, la union de distintas fronteras, tenemos que el teorema de Green en su forma más general es (para R^2):

$$\int_{\partial S^+} F \cdot d\lambda = \sum_i^n \int_{\lambda_i^+} F \cdot d\lambda = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

Si C es una curva cerrada simple que acota una región para la cual se aplica el teorema de Green, entonces el área de la región D acotada por C = ∂D es:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx$$

Definiciones

- Un conjunto D $\subseteq \mathbb{R}^n$ es conexo si todo par de puntos x, y $\in$ D se puede conectar por un camino contenido en D
- Un conjunto D $\subseteq \mathbb{R}^n$ es simplemente conexo si no tiene agujeros.

Centros de masa

El centro de masa se ubica en el punto $(\overline{x}, \overline{y})$ tal que

$$\overline{x} = \frac{\int_\Gamma x\rho(x,y)ds}{\int_\Gamma \rho ds} \qquad \overline{y} = \frac{\int_\Gamma y\rho(x,y)ds}{\int_\Gamma \rho ds}$$

Observaciones

$$\int_\Gamma F \cdot d\mathbf{r}$$

se interpreta como el trabajo que realiza la fuerza F sobre la curva.

$$\int_{\Gamma^+} F = -\int_{\Gamma^-} F$$

Teoremas

Teorema: La integral de línea de F es independiente del camino si y solo si $\int_\Gamma F = 0, \forall \Gamma \subseteq D$ cerrada.

Teorema: Sea F : I $\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continuo tal que las derivadas parciales de primer orden de P y Q son continuas y D es abierto y simplemente conexo

$$F \text{ es conservativo} \iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Corolario: F : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es conservativo $\Rightarrow$ rot (F) = 0

Teorema: F : U $\subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con U simplemente conexo y tal que las derivadas de F_1, F_2, F_3 son continuas

$$F \text{ es conservativo} \iff rotF = 0$$

3

Campos vectoriales e integrales de superficies

El conjunto de todos los puntos (x,y,z) en R^3 tal que x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v) varía en todo el dominio D, se llama superficie paramétrica s. r(u,v) = x(u,v)$\hat{\mathbf{i}}$+ y(u,v)$\hat{\mathbf{j}}$+ z(u,v)$\hat{\mathbf{k}}$. Curvas reticulares, si tenemos r(u,v), podemos tener u o v constantes.

Si consideramos la superficie S que se obtiene al hacer girar la curva y = f(x), $a \leq x \leq b$, alrededor del eje x, f(x) $\geq$ 0. θ ángulo de rotacion. Si (x,y,z) es un punto sobre S, entonces x = x, y = f(x)cos(θ), z = f(x)sen(θ).

Plano tangente a una superficie paramétrica S trazada por una función vectorial r(u,v) = x(u,v)$\hat{\mathbf{i}}$+ y(u,v)$\hat{\mathbf{j}}$+ z(u,v)$\hat{\mathbf{k}}$ en un punto P_0 con vector de posición $r(u_0, v_0)$

$$r_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\hat{\mathbf{k}}$$
$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\hat{\mathbf{k}}$$

Si $r_u \times r_v \neq 0$, entonces la superficie se llama suave. El plano tangente es el plano que contiene los vectores tangentes r_u y r_v y el vector normal $r_u \times r_v$, es un vector normal al plano tangente.

Definición

Si una superficie paramétrica suave S está dada por la ecuación r(u,v) = x(u,v)$\hat{\mathbf{i}}$+ y(u,v)$\hat{\mathbf{j}}$+z(u,v)$\hat{\mathbf{k}}$, (u,v) ∈ D y S es cubierta sólo una vez cuando (u,v) varía en todo el dominio del parámetro D, entonces el área de la superficie S es:

$$A(S) = \iint_D ||r_u \times r_v|| dA \tag{3.1}$$

donde

$$r_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\hat{\mathbf{k}}$$
$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\hat{\mathbf{k}}$$

Para el caso especial de una superficie S cuya ecuación es z = f(x,y) donde (x,y) ∈ D y f tiene derivadas parciales continuas. Las ecuaciones paramétricas son x = x, y = y, z = f(x,y)

$$r_x \times r_y = -\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \mathbf{k}$$
$$||r_x \times r_y|| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

Suponga que una superficie S tiene una ecuación vectorial: r(u,v) = x(u,v)$\hat{\mathbf{i}}$+ y(u,v)$\hat{\mathbf{j}}$+ z(u,v)$\hat{\mathbf{k}}$, (u,v) ∈ D. Se define la integral de superficie de f sobre la superficie S como

$$\iint_s f(x,y,z)dS = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\Delta S_{ij}$$

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(r(u,v))||r_u \times r_v||\, dA}$$

Cualquier superficie S con ecuación z = g(x,y) se puede considerar como una superficie paramétrica con ecuaciones paramétricas x = x, y = y, z = g(x,y)

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,g(x,y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\; dA$$

Si es posible elegir un vector unitario normal n en todos los puntos (x,y,z) de modo que ne varíe continuamente sobre S, entonces se dice que S es una superficie orientada y la elección dada de n proporciona a S una orientación.

$$n = \frac{r_u \times r_v}{||r_u \times r_v||}$$

En el caso de una superficie cerrada, es decir, una superficie que es la frontera de una región sólida E, la orientación positiva es aquella donde los vectores normales señalan hacia afuera de E y la negativa hacia el interior.

Definición

Si **F** es un campo vectorial continuo definido sobre una superficie orientada S con un vector unitario normal **n**, entonces la integral de superficie sobre S es:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Esta integral también se denomina flujo de F a través de S

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (r_u \times r_v)\, dA$$

Teorema de Stokes

Sea S una superficie suave por tramos y orientada que está acotada por una curva C suave por tramos, simple y cerrada con orientación positiva. Sea F un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta en R^3 que contiene a S. Entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S rot\ \mathbf{F} \cdot\ d\mathbf{S}$$

La curva acotada orientada en forma positiva de la superficie orientada S se escribe a menudo como ∂S, de modo que

$$\iint_S rot\ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Teorema de la divergencia

Sea E una región sólida simple y S la superficie frontera de E, dada con orientación positiva (hacia afuera). Sea **F** un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene E. Entonces

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot\ d\mathbf{S} = \iiint_E div\ \mathbf{F}\, dV$$

Observaciones

La **ecuación paramétrica del plano tangente a S** en r(u_0, v_0) es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r(u_0, v_0) + \alpha \frac{\partial r}{\partial u}(u_0, v_0) + \beta \frac{\partial r}{\partial v}(u_0, v_0)$$

La **ecuación normal** es:

$$0 = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - r(u_0, v_0) \right) \cdot \mathbf{n}$$

donde **n** es:

$$\mathbf{n} = \frac{\partial r}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial r}{\partial v}(u_0, v_0)$$

El plano tangente contiene todos los vectores tangentes a la superficie en ese punto.

Definiciones Mardsen

Con superficies, es necesario hacer una distinción entre una función (parametrización) y su imagen (un objeto geométrico).

Definición: Una **superficie parametrizada** es una función $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donde D es algún dominio en $\mathbb{R}^2$. La superficie S correspondiente a la función Φ es su imagen: $S = \Phi(D)$.

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Decimos que la superficie es suave en $\Phi(u_0, v_0)$ si $T_u \times T_v \neq 0$ en (u_0, v_0). Intuitivamente, una superficie suave no tiene esquinas.

El área de la superficie de revolución definida por f :[a,b] $\to$ (0, $+\infty$), en torno al eje x es

$$\text{Área} = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{f'(x)^2 + 1} dx$$

Si S es unión de superficies parametrizadas S_i, i = 1,...,N que no se intersecan excepto, quizá, a lo largo de curvas que definen sus fronteras, entonces la integral de f sobre S está definida por:

$$\int_S f\,dS = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} f\,dS$$

La masa total de una superficie con densidad de masa (por unidad de área) m está dada por

$$M(S) = \int_S m(x,y,z)\,dS$$

Definición: Una superficie orientada es una superficie de dos lados, uno de ellos el lado exterior o positivo, y el otro lado interior o negativo. En cada punto (x,y,z) $\in$ S hay dos vectores normales unitarios $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$, donde $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$. Así, para especificar un lado de una superficie S, en cada punto escogemos un vector normal unitario $\mathbf{n}$ que apunta hacia afuera desde el lado positivo de S en ese punto.

Teorema: Sea S una superficie orientada y sean Φ_1 y Φ_2 dos parametrizaciones suaves que preserven la orientación, con $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo definido en S. Entonces

$$\int_{\Phi_1} \mathbf{F}\cdot dS = \int_{\Phi_2} \mathbf{F}\cdot dS$$

Si Φ_1 preserva la orientación y Φ_2 la invierte, entonces:

$$\int_{\Phi_1} \mathbf{F}\cdot dS = -\int_{\Phi_2} \mathbf{F}\cdot dS$$

La integral $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ es la cantidad neta de fluido que fluye a través de la superficie por unidad de tiempo, esto es, la tasa de flujo. Por lo tanto, esta integral también se llama flujo de $\mathbf{F}$ a través de la superficie.

Orientación superficies para teorema de Stokes (Stonks)

El teorema de Stokes relaciona una integral de superficie sobre una superficie S con una integral de línea alrededor del contorno de la curva S.

Si se camina en la dirección positiva alrededor de C con la cabeza apuntando en la dirección de **n**, la superficie va a estar **siempre** a la izquierda. Sirve pensar en que el monito se posiciona de forma perpendicular en el contorno.

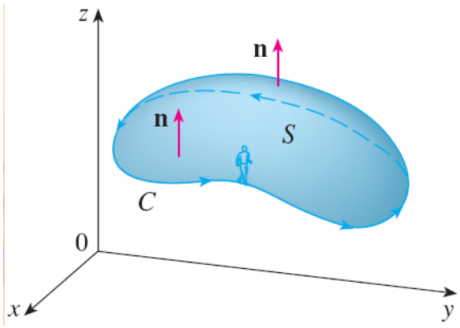


Figure 3.1: Orientación correcta en teorema de Stokes

Observaciones

- El teorema de la divergencia, se aplica donde el campo está definido. En este sentido, es parecido a Green, hay que aislar la discontinuidad con otra superficie.
- Sólo se puede usar el teorema de la divergencia en superficies cerradas.
- El teorema de Gauss asegura que el flujo de un campo vectorial hacia afuera de una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de ese campo vectorial sobre el volumen encerrado por la superficie.

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

- Si hay una discontinuidad para aplicar el teorema de Stokes, también es necesario aislar esa discontinuidad.

Parametrización superficies de revolución

1) Rotación respecto al eje x
Sea f(x), $a \leq x \leq b$ y θ el ángulo de rotación, la parametrización es

$$x = x \qquad y = f(x)cos(\theta) \qquad z = f(x)sen(\theta)$$

2) Rotación respecto al eje y
Sea f(t), $a \leq t \leq b$ y θ el ángulo de rotación, la parametrización es

$$x = f(t)cos(\theta) \qquad y = t \qquad z = f(t)sen(\theta)$$

3) Rotación respecto al eje z
Sea f(r), $a \leq r \leq b$ y θ el ángulo de rotación, la parametrización es

$$x = rcos(\theta) \qquad y = rsen(\theta) \qquad z = f(r)$$

No mecanizar estas fórmulas, es recomendable siempre hacer el dibujo para asegurarse de que está efectuando de forma correcta la parametrización. Esto debido a que no estoy tan seguro de que funcionen siempre.