P11 Dem $\frac{dT}{ds} = KN$

Por definición: $T = \frac{r'(T)}{|r'(T)|}$

También: $S(T) = \int_a^T |r'(\tau)|\, d\tau \Rightarrow \frac{ds}{dT} = |r'(T)|$

Entonces: $T = \frac{r'(T)}{\frac{ds}{dT}} = \frac{\frac{dr}{dT}}{\frac{ds}{dT}} \Rightarrow T = \frac{dr}{ds}$

Ahora, por definición: $N = \frac{T'}{|T'|} \Rightarrow N = \frac{\frac{dT}{ds}}{\left|\frac{dT}{ds}\right|}$

$\Rightarrow \frac{dT}{ds} = N\left|\frac{dT}{ds}\right|$, donde $K = \left|\frac{dT}{ds}\right|$

$\therefore \frac{dT}{ds} = KN$

Recta tiene $K = 0$

Circunferencia tiene $K = cte.$, $0 \leq K \leq 1$

Dem $\frac{dB}{ds} = -\tau N$

Por definición $B = T \times N$, derivando respecto a s

$$\frac{dB}{ds} = \underbrace{\frac{dT}{ds}}_{\text{Formula Anterior}} \times N + T \times \frac{dN}{ds} \Rightarrow \frac{dB}{ds} = \underbrace{\kappa N \times N}_{0\ (A \times A = 0)} + T \times \frac{dN}{ds}$$

$$\Rightarrow \frac{dB}{ds} = T \times \frac{dN}{ds}$$

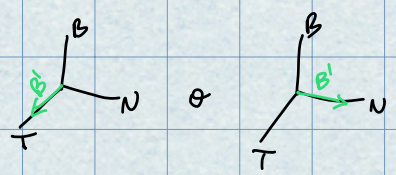
Recuerden que si $|\vec{c}| = cte \Rightarrow \vec{c} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{c} \perp \vec{c}$

→ Prueba: $|T| = T \cdot T = cte$, derivando $\Rightarrow T' \cdot T + T \cdot T' = 0$

$\Rightarrow 2T' \cdot T = 0 \Rightarrow T' \cdot T = 0 \Rightarrow T' \perp T$

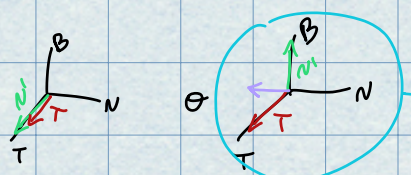
Entonces $\frac{dB}{ds} \perp B$ y $\frac{dN}{ds} \perp N$

Gráficamente: $B' \perp B$



☆ Pueden ir para ambos sentidos, da lo mismo

Gráficamente $T \times N'$, con $N' \perp N$



→ Este nos sirve, ya que el vector resultante es

Entonces, como $\dot{B}$ es $\perp$ a B (puede ir en la dirección de T o N) y $T \times \dot{N}$ va en la dirección de N.

Solo queda que $\frac{dB}{ds} \| N$ (ya que cumple las condiciones de arriba)

Entonces, se sabe que si $\vec{A} \| \vec{C}$, entonces puedo escribir $\vec{A} = \alpha \vec{C}$, donde α es cte.

$\frac{dB}{ds} = \tau N$, donde por convención se pondrá un $-$

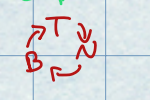
$\therefore \frac{dB}{ds} = -\tau N$

Dem $\frac{dN}{ds} = \tau B - kT$

Por definición $N = B \times T$ (recuerden que es una base ortonormal)

Derivando respecto a s $\Rightarrow$ $\frac{dN}{ds} = \underbrace{\frac{dB}{ds}}_{\text{Frenet}} \times T + B \times \underbrace{\frac{dT}{ds}}_{\text{Frenet}}$

$\Rightarrow \frac{dN}{ds} = (-\tau N) \times T + B \times (kN) \Rightarrow N' = -\tau(N \times T) + k(B \times N)$



Horario:
$T \times N = B$
$N \times B = T$
$B \times T = N$

Antihorario
$N \times T = -B$
$T \times B = -N$
$B \times N = -T$

$$\Rightarrow N' = -\tau(-B) + K(-T) \Rightarrow N' = \tau B - KT$$

$$\therefore \frac{dN}{ds} = \tau B - KT$$

P2

Piden τ y K de una función $\beta(T)$

$$\tau_\beta = \frac{(\beta' \times \beta'') \cdot \beta'''}{|\beta' \times \beta''|^2} \quad \wedge \quad K_\beta = \frac{|\beta' \times \beta''|}{|\beta'|^3}$$

$$\beta(T) = \int_a^T T(s) \times T'(s)\, ds \Rightarrow \beta'(T) = T(T) \times \underbrace{T'(T)}_{\text{Frenet}} \Rightarrow \beta' = T \times KN$$

$$\beta' = K(T \times N) \Rightarrow \beta' = KB$$

$$\beta'' = K'B + K\underbrace{B'}_{\text{Frenet}} \Rightarrow B'' = K'B + K(-\tau N) \Rightarrow B'' = K'B - \tau KN$$

$$\beta''' = K''B + K'\underbrace{B'}_{\text{Frenet}} - (\tau K)'N - \tau K\underbrace{N'}_{\text{Frenet}} \Rightarrow \beta''' = K''B + K'(-\tau N) - (\tau K)'N - \tau K(\tau B - KT)$$

$$\Rightarrow \beta''' = \underbrace{B(K'' - \tau^2 K)}_{A} - \underbrace{N(K'\tau + (\tau K)')}_{C} - \underbrace{TK^2\tau}_{D}$$

$$\Rightarrow \beta''' = BA + NC + TK$$



Para K_β

$$\beta' \times \beta'' = KB \times (\dot{K}B - \tau KN) = -\tau K K(B \times N) = -\tau K^2(-T) = \tau K^2 T$$

($B \times B = 0$; $B \times N = -T$)

$$\beta' \times \beta'' = \tau K^2 T \quad ; \quad |\beta' \times \beta''| = |\tau||K^2||T| = |\tau| K^2$$

$$|\beta'|^3 = (|K||B|)^3 = K^3$$

$$\therefore K_\beta = \frac{|\beta' \times \beta''|}{|\beta'|^3} = \frac{|\tau| K^2}{K^3} = \frac{|\tau|}{K}$$

$$\gamma_\beta = \frac{(\beta' \times \beta'') \cdot \beta'''}{|\beta' \times \beta''|^2}$$

$$(\beta' \times \beta'') \cdot \beta''' = \tau K^2 T \cdot (BA + NC + TD) = \tau K^2 D = \tau K^2 \tau K^2 = (\tau K^2)^2$$

($T \cdot B = 0$; $T \cdot N = 0$; $T \cdot T = 1$)

$$(\beta' \times \beta'') \cdot \beta''' = (\tau K^2)^2$$

$$|\beta' \times \beta''|^2 = (|\tau| K^2)^2 = \tau^2 K^4$$

$$\gamma_\beta = \frac{(\beta' \times \beta'') \cdot \beta'''}{|\beta' \times \beta''|^2} = \frac{(\tau K^2)^2}{\tau^2 K^4} = 1$$

P3) $\left|\frac{dT}{ds} \times \frac{d^2T}{ds^2}\right| = K^2\sqrt{K^2+\tau^2}$

$$\left|\frac{dT}{ds} \times \frac{d^2T}{ds^2}\right| = \left|KN \times (KN)'\right| = \left|KN \times (K'N + KN')\right|$$

$\frac{dT}{ds}$: Frenet. KN': Frenet.

$$= \left|KN \times (K'N + K(\tau B - KT))\right| = \left|K^2(N \times [\tau B - KT])\right|$$

$N \times (B - T)$; $N \times N = 0$; $N \times T = -B$; $N \times B = T$

$$= \left|K^2(\tau T + KB)\right| = \left|K^2\tau T + K^3 B\right|$$

Por definición valor absoluto.

$$\sqrt{(K^2\tau T)^2 + (K^3 B)^2} = \sqrt{K^4\tau^2 + K^6} = K^2\sqrt{\tau^2 + K^2}$$

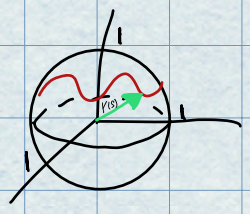
$$\therefore \left|\frac{dT}{ds} \times \frac{d^2T}{ds^2}\right| = K^2\sqrt{K^2+\tau^2}$$

P4

Al ser el Triedro de Frenet (T, N, B) una base ortonormal, siempre será posible escribir cualquier vector en función de las proyecciones respecto a las bases

Es decir, $\vec{A} = \underbrace{Proy_T A}_{\frac{\vec{u}\cdot\vec{T}}{|\vec{T}|^2}\vec{T}} + \underbrace{Proy_N A}_{\frac{\vec{u}\cdot\vec{N}}{|\vec{N}|^2}\vec{N}} + \underbrace{Proy_B A}_{\frac{\vec{u}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|^2}\vec{B}}$

Para el problema, se tiene



Se sabe que en una esfera se cumple que $r'(t)\cdot r(t) = 0$, ya que $|r(t)| = cte$

Si está Argoparametrizada

$$\underbrace{r'(s)}_{r'(s)=T}\cdot r(s) = 0$$

$$\Rightarrow T(s)\cdot r(s) = 0$$

Derivando respecto a s.

$$T'(s)\cdot F(s) + T(s)\cdot \underbrace{F'(s)}_{T(s)} = 0$$

$$T'(s)\cdot F(s) + \overbrace{1}^{T\cdot T=1} = 0$$

$$\underbrace{T'(s)\cdot F(s) = -1}$$

Se parece a algo... ¿una proyección?

$$\text{Proy}_{T(s)} F(s) = \frac{\vec{F}(s)\cdot\vec{T}(s)}{|\vec{T}(s)|^2}\vec{T}(s) \Rightarrow \text{Proy}_{T(s)} F = (\vec{F}(s)\cdot\vec{T}(s))\vec{T}(s)$$

El $\vec{T}$ multiplicando da la dirección de la proyección, si lo obviamos, nos queda solo lo que vale la proyección.

Y eso es exactamente lo que tenemos: $T'(s)\cdot F(s)$

Usando Frenet: $KN\cdot F(s) = -1 \Rightarrow N\cdot F(s) = -\frac{1}{K(s)}$

$\therefore$ Se tiene el valor sin dirección de la Proy. de $F(s)$ sobre N.

Derivando respecto a s lo anterior

$$\underbrace{N'\cdot F}_{\text{Frenet}} + \underbrace{N\cdot F'}_{\text{Frenet}} = \frac{K'(s)}{K^2(s)}$$

$$\Rightarrow (\gamma B - KT)\cdot F + \underbrace{N\cdot T}_{N\perp T} = \frac{K'(s)}{K^2(s)}$$

$$\Rightarrow \tau B \cdot F - K \underbrace{T \cdot F}_{T \perp F} = \frac{K'(s)}{K^2(s)}$$

$$\Rightarrow \tau B \cdot F = \frac{K'(s)}{K^2(s)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{B \cdot F(s)}_{} = \frac{K'(s)}{\tau K^2(s)}$$

Lo mismo de antes, la proy. de $F(s)$ sobre B sin la dirección.

Ahora, se sabe que $F(s)$ puede ser escrito en términos de la base ortonormal

$$F(s) = \underbrace{P_{roy_T} F(s)}_{T \perp F(s) \Rightarrow T \cdot F(s) = 0} + P_{roy_N} F(s) + P_{roy_B} F(s)$$

$$F(s) = \frac{K'(s)}{\tau K^2(s)} + \left(-\frac{1}{K(s)}\right)$$

Ahora, sacando norma a $F(s)$

$$|F(s)| = \sqrt{\left(\frac{K'(s)}{\tau K^2(s)}\right)^2 + \left(-\frac{1}{K(s)}\right)^2}$$

Como $F(s)$ es la ancoparametrización de la curva sobre la esfera unitaria,

Su Norma es 1.

$$1 = \sqrt{\left(\frac{K'(s)}{\gamma^2 K^3(s)}\right)^2 + \left(-\frac{1}{K(s)}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{K'^2(s)}{\gamma^2 K^4(s)} + \frac{1}{K^2(s)}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{K^2(s)} = \frac{K'^2(s)}{\gamma^2 K^4(s)} \quad \Rightarrow \quad \frac{K(s)-1}{K^2(s)} = \frac{K'^2(s)}{\gamma^2 K^4(s)}$$

$$\Rightarrow \frac{(K(s)-1)\,\gamma^2 K^4(s)}{K^2(s)} = K'^2(s)$$

$$\Rightarrow (K(s)-1)\,\gamma^2 K^2(s) = K'^2(s)$$

$$\therefore \quad (K(s)-1)\,\gamma^2 K^2(s) = K'^2(s)$$

P5

Para probar que está contenida en un círculo de radio 1, debemos mostrar que $K = cte$

Como el vector normal unitario está en términos de s, K también → $K(s)$

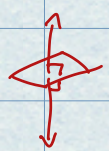
Y se sabe que $K(s) = \left|\frac{dT}{ds}\right|$ → hay que encontrar T

Si la curva está contenida en el plano $z = \sqrt{3}x$, quiere decir

que $z = \sqrt{3}x$ es el plano osculador de la curva.

Se sabe que el plano osculador es aquel formado por T y N, donde el vector ⊥ al plano es el "Binormal" sin normalizar (el cual es cte)

$z - \sqrt{3}x = 0$ ⇒ el vector normal es $\pm(-\sqrt{3}, 0, 1)$



Puede ser cualquiera, con eso el ±

Y si normalizamos ⇒ $\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2} = 2$

$\therefore B = \pm\frac{1}{2}(-\sqrt{3}, 0, \frac{1}{2})$

Ahora tenemos N y B

Recordando que $T = N \times B$

$$T = \left(-\tfrac{1}{2}\cos s, -\sin s, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos s\right) \times \pm\tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{3}, 0, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$T = \pm\left(-\tfrac{1}{2}\sin s, \cos s, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin s\right)$$

Ahora derivamos respecto a s.

$$\frac{dT}{ds} = \pm\left(-\tfrac{1}{2}\cos s, -\sin s, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos s\right)$$

$$\left|\frac{dT}{ds}\right| = \sqrt{\tfrac{1}{4}\cos^2 s + \sin^2 s + \tfrac{3}{4}\cos^2 s} = 1$$

$\therefore$ $K(s) = 1$, constante para todo s.

Entonces, se concluye que la curva está en un círculo con radio $\rho = \frac{1}{K} = 1$ //

PD: hagan todas las ayudantías otra vez y demuestren Frenet-Serret !!!