PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SEGUNDO SEMESTRE 2014

MAT1630 ⋆ CÁLCULO III
INTERROGACIÓN 2

1. Determinar la distancía mínima entre el origen y un punto de la superficie

$$2z = x^2 - y^2 - 3$$

Solución:

La distance del origen al punto (x, y, z) esta dada por $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Minimalizar la distancia es equivalente al minimalizar su cuadrado, es decir $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. La restricción esta dada por $g(x, y, z) = 0$ donde $g(x, y, z) = x^2 - y^2 - 2z - 3$

Empleamos el método de los Multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda 2x \\ 2y &= \lambda(-2y) \\ 2z &= \lambda(-2) \\ 2z &= x^2 - y^2 - 3 \end{aligned}$$

Es decir:

$$2x(1-\lambda) = 0, \quad 2y(1+\lambda) = 0, \quad 2(z+\lambda) = 0, \quad 2z = x^2 - y^2 - 3$$

De donde, si $\lambda \neq \pm 1$, el punto crítico en la superficie corresponde a

$$x = 0, \quad y = 0, \ z = -3/2,$$

que es encuentra a distance $3/2$.

Si $\lambda = 1$, hay dos puntos críticos en la superficie, los que corresponden a

$$z = -1, \quad y = 0, \quad x = \pm 1$$

y ambos están a distancia $\sqrt{2}$ del origen.

Por último, si $\lambda = -1$, debería tenerse

$$z = 1, \quad x = 0, \quad y^2 = -5$$

es decir, no hay puntos en la superficie correspondientes a este caso. En consecuencia, la distancia mínima buscada es $\sqrt{2}$.

2. Considere

$$F(x, y, u, v) = u - v + 2x - 2y.$$
$$G(x, y, u, v) = 3u^3 + v^3 - 5x^2 + y^3.$$

a) Verifique que en un entorno de $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$, las relaciones

$$F(x, y, u, v) = 0, \quad G(x, y, u, v) = 0$$

permiten escribir

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y)$$

con u y v diferenciables en x y y.

b) Calcule $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ en $(1, 1)$.

Solución:

a) Por el Teorema de la Función Implicita podemos despejar u y v como funciones diferenciables en x y y alrededor de los puntos (x, y, u, v) si el siguiente determinante jacobiano no es igual a 0:

$$\Delta := \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 9u^2 & 3v^2 \end{vmatrix} = 3v^2 + 9u^2$$

Pero $\Delta(1, 1, 1, 1) = 12 \neq 0$ y por tanto se puede despejar u y v alrededor de $(1, 1, 1, 1)$.

b) Para hallar las derivadas parciales u_x, u_y, v_x, v_y derivamos las ecuaciones $F = 0$, $G = 0$ a respecto x y y y escribiremos en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ v_x \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_x \\ G_x \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_y \\ v_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_y \\ G_y \end{bmatrix}$$

Evaluando en $(1, 1, 1, 1)$ se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_y \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix},$$

Usando que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

y $ad - bc = 12$ se obtiene:

$$u_x = 4/12 = 1/3, \quad v_x = 28/12 = 2\frac{1}{3}$$

$$u_y = 3/12 = 1/4, \quad v_y = -21/12 = -1\frac{3}{4}$$

3. Calcule las siguientes integrales:

   a)

$$\int_0^1 \int_{arcsen(y)}^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}dxdy.$$

   b)

$$\int\int_D arctg(y/x)dA,$$

   donde D es la región encerrada por

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad y = x, \quad y = \sqrt{3}x$$

   y que cumple la condición $y > 0$.

Solución: a) Observamos que la región de integración D esta dada por

$$0 \le y \le 1, \quad \text{arc sen}(y) \le x \le \pi/2$$

Alternativamente:

$$0 \le x \le \pi/2, \quad 0 \le y \le \text{sen}(x)$$

Cambiamos el orden de integración y calculamos para obtener la respuesta:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{arcsen(y)}^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}dxdy &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\text{sen}(x)} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}dydx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)} \int_0^{\text{sen}(x)} dydx \\ &= \int_0^{\pi/2} \text{sen}(x)\cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}dx = [-\frac{(1+\cos^2(x))^{3/2}}{3}]_0^{\pi/2} \\ &= (2\sqrt{2}-1)/3 \end{aligned} \tag{1}$$

b) En coordenadas polares (r, θ) la región D esta dada por

$$1 \leq r \leq 2, \quad \pi/2 \leq \theta \leq \pi/3$$

y la función $f(x, y) = \arctan(y/x)$ por θ. Usando coordenadas polares se obtiene:

$$\int\int_D arctg(y/x)dA = \int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_1^2 \theta r dr d\theta = [\theta^2/2]_{\pi/3}^{\pi/2}[r^2/2]_1^2 = 5\pi^2/48$$

4. Determinar el volumen W de la región del espacio $\mathbb{R}^3$ determinado por

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \quad z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$$

donde $a > 0$ es un constante arbitraria.

Solución:

En coordenadas esféricas la ecuación de la esfera es $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, es decir $\rho = a$. Además, la esfera y el cono se cortan cuando

$$(x^2 + y^2) + z^2 = (z^2) + z^2 = a^2 \quad \text{entonces} \quad z = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

y como $z = \rho\cos\phi$ concluimos que

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{entonces} \quad \phi = \frac{\pi}{4}$$

En consecuencia, en coordenadas esféricas la región W esta dado por

$$W = \{(\rho, \phi, \theta) | 0 \leq \rho \leq a,\ 0 \leq \phi \leq \pi/4,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} Volumen(W) &= \iiint_W dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^a \rho^2 \operatorname{sen}\phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} [\operatorname{sen}\phi\rho^3/3]_0^a d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} a^3/3 \operatorname{sen}\phi d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [-a^3\cos\phi/3]_0^{\pi/4} d\theta = a^3/3\int_0^{2\pi}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})d\theta = \frac{a^3\pi(2-\sqrt{2})}{3} \end{aligned}$$