Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
TAV 2021

Cálculo III - MAT1630
PAUTA Interrogación 2

Problema 1

Encuentre la tercera coordenada del centro de masa de la curva intersección entre el plano $x+y+z=3$ y el cilindro $x^2+y^2=1$ si se sabe que la densidad de masa en un punto (x,y,z) está dada por $\delta(x,y,z)=\sqrt{1-xy}$.

Solución

La parametrización es:

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\operatorname{sen}\theta \\ z=3-\cos\theta-\operatorname{sen}\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x'=-\operatorname{sen}\theta \\ y'=\cos\theta \\ z'=\operatorname{sen}\theta-\cos\theta \end{cases}$$

con $-\pi\leq\theta\leq\pi$. Se tiene

$$\begin{aligned} m=\oint_\gamma \sqrt{1-xy}ds &= \int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\sqrt{2-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}d\theta \\ &= \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\operatorname{sen}\theta\cos\theta)d\theta \\ &= \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta = 2\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

Si $\bar{z}$ es la tercera coordenada del centro de masa, entonces

$$\bar{z}=\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\oint_\gamma z\delta(x,y,z)ds$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3-\cos(\theta)-\operatorname{sen}(\theta))\sqrt{1-\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\sqrt{2-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3-\cos(\theta)-\operatorname{sen}(\theta))(1-\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta))d\theta \end{aligned}$$

Las integrales de funciones impares se anulan en $[-\pi,\pi]$ por lo que

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(3-\cos(\theta)+\operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\theta)\right)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(3\theta-\operatorname{sen}(\theta)+\frac{\operatorname{sen}^3(\theta)}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=3 \end{aligned}$$

Puntaje:

- 1 punto por parametrizar correctamente la curva (cualquiera sirve).
- 1 punto por establecer la fórmula para calcular la masa.
- 1 punto por escribir correctamente la integral de campo escalar de la densidad como una integral de Riemann.
- 1 punto por calcular correctamente la masa.
- 1 punto por establecer una fórmula para calcular $\bar{z}$.
- 1 punto por calcular correctamente $\bar{z}$.

Problema 2

Calcule

$$\int_\gamma (2xe^{x^2+2y^2} - y)dx + (4ye^{x^2+2y^2} - x)dy$$

donde γ es el arco de curva $y = 2 - x^2$ que une el punto $(1, 1)$ con el punto $(-1, 1)$.

Solución

Primero notamos que el campo vectorial, digamos $F = (P, Q)$, es conservativo. En efecto: El campo es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$ y

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(4ye^{x^2+2y^2} - x\right) = 8xye^{x^2+2y^2} - 1,$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xe^{x^2+2y^2} - y\right) = 8xye^{x^2+2y^2} - 1.$$

Forma 1:

Buscamos un potencial f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+2y^2} - y \Longrightarrow f(x, y) = e^{x^2+2y^2} - xy + g(y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4ye^{x^2+2y^2} - x + g'(y) = 4ye^{x^2+2y^2} - x \Longrightarrow g(y) = c, \text{ constante.}$$

Por lo tanto un potencial es

$$f(x, y) = e^{x^2+2y^2} - xy.$$

Ya que el potencial es convervativo, por el Teorema Fundamental de Integrales de Línea se tiene

$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_\gamma \nabla f \cdot dr = f(-1,1) - f(1,1) = (e^3+1) - (e^3-1) = 2.$$

Forma 2:

Como la integral es independiente de la trayectoria, entonces

$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_\delta F \cdot dr$$

donde δ es el segmento de línea recta que une el punto $(1,1)$ con $(-1,1)$. Así,

$$\delta(t) = (1-t)(1,1) + t(-1,1) = (1-2t,1), \quad t \in [0,1].$$

$$\delta'(t) = (-2,0)$$

$$F(\delta(t)) \cdot \delta'(t) = -2(2(1-2t)e^{(1-2t)^2+2} - 1)$$

$$\implies \int_\gamma F \cdot dr = \int_0^1 -4(1-2t)e^{(1-2t)^2+2} + 2 \; dt = e^{(1-2t)^2+2} + 2t \Big|_0^1 = 2.$$

Puntaje Forma 1:

- 2 puntos por probar que el campo es conservativo (Clase C^1 y derivadas parciales iguales).
- 2 puntos por determinar un potencial f.
- 1 punto por usar el Teorema Fundamental de las Integrales de Línea
- 1 punto por el resultado correcto.

Puntaje Forma 2:

- 2 puntos por probar que el campo es conservativo (Clase C^1 y derivadas parciales iguales).
- 1 puntos por establecer la independencia de trayectorias de la integral.
- 1 punto por parametrizar la curva δ (también podría ser otra)
- 1 punto por escribir correctamente la integral de campo vectorial como una integral de Riemann.
- 1 punto por el resultado correcto.

Problema 3

Usando el Teorema de Green calcule

$$\iint_D x - 1 \; dA$$

donde D es la región del plano interior a $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ y exterior a $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Solución

Sea γ la elipse exterior y δ la elipse interior, ambas recorridas en sentido antihorario. Definimos un campo vectorial $F = (P, Q)$ tal que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x - 1.$$

Basta considerar $Q(x, y) = \frac{1}{2}x^2$ y $P(x, y) = y$. De esta forma el campo vectorial es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ y por el Teorema de Green se tiene que

$$\iint_D x - 1 \; dA = \oint_\gamma F \cdot dr - \oint_\delta F \cdot dr.$$

Para calcular ambas integrales de línea simultáneamente, calcularemos

$$\int_C F \cdot dr$$

donde C es la curva $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ recorrida en sentido antihorario. Consideramos para $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = -a\sin\theta \\ y' = b\cos\theta \end{cases}.$$

Además,

$$F(x(\theta), y(\theta)) = \left(b\sin\theta, \frac{a^2}{2}\cos^2\theta \right).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot dr = \int_C P dx + Q dy &= \int_0^{2\pi} -ab\sin^2\theta + \frac{1}{2}a^2 b\cos^3\theta \; d\theta. \\ &= \int_0^{2\pi} -ab\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)\right) + \frac{1}{2}a^2 b\left((1 - \sin^2\theta)\cos\theta\right) \; d\theta \\ &= -ab\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\theta)\right) + \frac{1}{2}a^2 b\left(\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\Big|_0^{2\pi} \\ &= -ab\pi. \end{aligned}$$

Esto implica que $\oint_\gamma F \cdot dr = -6\pi$ y $\oint_\delta F \cdot dr = -2\pi$ y por lo tanto

$$\iint_D x - 1 \; dA = -6\pi - (-2\pi) = -4\pi.$$

Puntaje:

- 1 puntos por definir correctamente un campo vectorial adecuado.
- 2 punto por utilizar correctamente el Teorema de Green.
- 1 punto por calcular cada una de las integrales de línea (2 puntos en total).
- 1 punto por determinar el resultado final.