Problema 1

Demostrar que, en la vecindad del punto (1, 1, 1), la ecuación

$$3xyz + z^3 - x^2 + y^2 = 4$$

define implícitamente z como función de (x, y). Calcular z_{xy} para $x = 1, y = 1$.

Claramente el punto indicado satisface la ecuación propuesta y, siendo

$$F(x,y,z) = 3xyz + z^3 - x^2 + y^2 - 4\,,$$

resulta

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3\left(xy + z^2\right);$$

luego $F_z(1,1,1) = 6 \neq 0$.

Derivando la ecuación

$$3xy \cdot z(x,y) + \left(z(x,y)\right)^3 - x^2 + y^2 = 4$$

miembro a miembro, respecto a x y a y sucesivamente, se obtiene

$$\left.\begin{aligned} 3yz + 3xyz_x + 3z^2 z_x - 2x = 0 \\ 3xz + 3xyz_y + 3z^2 z_y + 2y = 0 \end{aligned}\right\}$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} z_x = \frac{2x - 3yz}{3\left(xy + z^2\right)} \\ z_y = -\frac{2y + 3xz}{3\left(xy + z^2\right)} \end{aligned}\right\}$$

Ahora bien,

$$z_{xy} = \frac{\partial z_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x - 3yz}{3\left(xy + z^2\right)}\right) = \frac{\left(-3z - 3yz_y\right)3\left(xy + z^2\right) - 3\left(x + 2zz_y\right)\left(2x - 3yz\right)}{9\left(xy + z^2\right)^2};$$

pero

$$z_y(1,1,1) = -\frac{5}{6};$$

de modo que

$$z_{xy}(1,1,1) = \frac{\left(-3 - 3(-5/6)\right)3\left(1+1\right) - 3\left(1 + 2(-5/6)\right)\left(2 - 3\right)}{9\left(1+1\right)^2} = -\frac{5}{36}$$

Problema 2

a) Discutir, según el valor del parámetro a, la naturaleza de los puntos críticos de

$$f(x) = (ax^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad (a \neq 1).$$

b) Determinar el mayor volumen que puede tener un paralelepípedo rectangular que tiene tres de sus caras en los planos de coordenadas y el vértice opuesto al origen en un punto de coordenadas positivas que pertenece al plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

---

a)

$$f_x = 2x\left(a - ax^2 - y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$$
$$f_y = 2y\left(1 - ax^2 - y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

Como $a \neq 1$, los puntos críticos son $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$ y $(\pm 1, 0)$.
Pues bien,

$$f_{xx} = 2\left(a - 5ax^2 - y^2 + 2ax^4 + 2x^2y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$$
$$f_{xy} = 4xy\left(-2(a+1)xy + ax^2 + y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$$
$$f_{yy} = 2xy\left(1 - ax^2 - 5y^2 + 2ax^2y^2 + 2y^4\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

Luego

$$H(0,0) = 4\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4a$$
$$H(0,\pm 1) = 4e^{-1}\begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 8(1-a)e^{-1}$$
$$H(\pm 1,0) = 4e^{-1}\begin{vmatrix} -2a & 0 \\ 0 & 1-a \end{vmatrix} = 8a(a-1)e^{-1}$$

De modo que

En $(0, 0)$ hay $\begin{cases} \text{un mínimo local si } a > 0 \\ \text{un punto de silla si } a < 0 \end{cases}$

En $(0, \pm 1)$ hay $\begin{cases} \text{un máximo local si } a < 1 \\ \text{un punto de silla si } a > 1 \end{cases}$

En $(\pm 1, 0)$ hay $\begin{cases} \text{un máximo local si } a < 0 \\ \text{un punto de silla si } 0 < a < 1 \\ \text{un mínimo local si } a > 1 \end{cases}$

---

b) Sea (x, y, z) el vértice en cuestión; aplicando el método de Lagrange, con

$$\Lambda = xyz + \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1\right)$$

con lo cual

$$\begin{cases} \Lambda_x = & yz + (\lambda/a) = 0 \\ \Lambda_y = & xz + (\lambda/b) = 0 \\ \Lambda_z = & xy + (\lambda/c) = 0 \end{cases}$$

Multiplicando, respectivamente por x, y, z y sumando,

$$3xyz + \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0$$

de modo que $\lambda = -3xyz$ y, reemplazando se obtiene

$$x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{b}{3}, \quad z = \frac{c}{3}$$

punto que produce el máximo, ya que el dominio es compacto y el mínimo es 0; con ello se obtiene

$$\text{Vol}_{\max} = \frac{abc}{27}$$

Problema 3

Verificar el cumplimiento del teorema de Stokes para

$$\vec{F} = 3y\hat{i} - xz\hat{j} + yz^2\hat{k}$$

en la superficie σ que es la parte del paraboloide $2z = x^2 + y^2$ limitada por $z \le 2$.

(A)

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} = \left(z^2 + x\right)\hat{i} - \left(z + 3\right)\hat{k};$$

$$\hat{n} = \frac{\nabla\left(x^2 + y^2 - 2z\right)}{\left\|\nabla\left(x^2 + y^2 - 2z\right)\right\|} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} - z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

luego, siendo *R* la proyección de σ en el plano *Oxy*,

$$\iint_{\sigma} \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \hat{n}\, dS = \iint_{R} \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \hat{n}\, \frac{dx\,dy}{\hat{n} \cdot \hat{k}} = \iint_{R} \left(xz^2 + x^2 + z + 3\right) dx\,dy$$

$$= \iint_{R} \left(x\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2 + x^2 + \frac{x^2 + y^2}{2} + 3 \right) dx\,dy$$

Usando coordenadas polares queda

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{2} \left[(\rho\cos\phi)\left(\rho^4/2\right) + \rho^2\cos^2\phi + \rho^2/2 + 3 \right] \rho\, d\rho\, d\phi = 20\pi$$

(B), La frontera *C* de σ es la circunferencia dada por

$$\vec{r} = \left(2\cos t\right)\hat{i} + \left(2\,\mathrm{sen}\, t\right)\hat{j} + 2\hat{k}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Puesto que en (A) el vector $\hat{n}$ apunta hacia afuera del paraboloide, *C* debe recorrerse en el sentido adecuado:

$$\oint_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C} \left(3y\,dx - xz\,dy + yz^2\,dz\right)$$

$$= \int_{2\pi}^{0} \left[3(2\,\mathrm{sen}\, t)(-2\,\mathrm{sen}\, t) - (2\cos t)2(2\cos t) \right] dt$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \left[12\,\mathrm{sen}^2 t + 8\cos^2 t \right] dt = 20\pi.$$

Problema 4

Calcular $\iint_{\sigma} \left\{(2x+3z)\hat{i} - (xz+y)\hat{j} + \left(y^2+2z\right)\hat{k}\right\} \cdot \hat{n}\, dS$,

siendo σ la superficie formada por la unión del cilindro

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \le z \le 3$$

con la semiesfera

$$x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 1, \quad z \le 3.$$

La integral

$$I = \iint_{\sigma} \left\{(2x+3z)\hat{i} - (xz+y)\hat{j} + \left(y^2+2z\right)\hat{k}\right\} \cdot \hat{n}\, dS$$

puede calcularse aplicando el teorema de la divergencia de Gauss a la región *R* encerrada por σ y por el disco

$$\delta : x^2 + y^2 \le 1, \quad z = 0;$$

y sustrayendo del total el valor de la integral en este último.

Siendo, pues, $\bar{\sigma} = \sigma \cup \delta$, dado que

$$\nabla \cdot \left\{(2x+3z)\hat{i} - (xz+y)\hat{j} + (y^2+2z)\hat{k}\right\} = 2 - 1 + 2 = 3,$$

$$\iint_{\bar{\sigma}} \left\{(2x+3z)\hat{i} - (xz+y)\hat{j} + (y^2+2z)\hat{k}\right\} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint_{R} 3\, dV = 3 \cdot vol(R)$$

El volumen de *R* puede calcularse, ya sea sustrayendo el volumen de la semiesfera del volumen del cilindro, o bien mediante

$$vol(R) = \iint_{x^2+y^2 \le 1} \left[3 - \sqrt{1-x^2-y^2}\right] dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[3 - \sqrt{1-\rho^2}\right] \rho\, d\rho d\phi = \frac{7\pi}{3}.$$

De este modo,

$$\iint_{\bar{\sigma}} \left\{(2x+3z)\hat{i} - (xz+y)\hat{j} + (y^2+2z)\hat{k}\right\} \cdot \hat{n}\, dS = 7\pi.$$

Por otra parte, el flujo a través del disco δ, hacia abajo, es

$$\begin{aligned}
\iint_{\delta} \left[(2x+3\cdot 0)\hat{i} - (x\cdot 0+y)\hat{j} + \left(y^2+2\cdot 0\right)\hat{k}\right] \cdot (-\hat{k})\, dS &= -\iint_{x^2+y^2 \le 1} y^2 dxdy \\
&= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^3 \operatorname{sen}^2 \phi\, d\phi d\rho \\
&= -\left(\int_0^1 \rho^3 d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \phi d\phi\right) \\
&= -\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

de modo que, según lo anterior,