Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
TAV 2017

Pauta Interrogación 2.

MAT 1630. Cálculo 3.

1. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva arcoparametrizada que satisface que todos los planos normales a la curva pasan por un punto fijo c. Demuestre que la torsión τ_α y la curvatura κ_α de α satisfacen
$$\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = \left(\frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha}\right)'.$$
Recuerde que: El plano normal a una curva es aquel plano vectorial que esta generado por los vectores normal y binormal de la curva.

Solución. La curva α satisface para cada s,
$$(c-\alpha)\cdot T_\alpha = 0. \tag{1}$$
Derivando (1) obtenemos
$$-T_\alpha \cdot T_\alpha + (c-\alpha)\cdot \dot{T}_\alpha = 0 \Leftrightarrow (c-\alpha)\cdot N_\alpha = \frac{1}{\kappa_\alpha}. \tag{2}$$
Derivando (2) obtenemos
$$-T_\alpha \cdot N_\alpha + (c-\alpha)\cdot \dot{N}_\alpha = \frac{-\dot{\kappa_\alpha}}{\kappa_\alpha^2} \Leftrightarrow (c-\alpha)\cdot(-\kappa_\alpha T_\alpha + \tau_\alpha B_\alpha) = \frac{-\dot{\kappa_\alpha}}{\kappa_\alpha^2}.$$
Por tanto, esto junto con (1), obtenemos que
$$(c-\alpha)\cdot B_\alpha = \frac{-\dot{\kappa_\alpha}}{\tau_\alpha \kappa_\alpha^2}. \tag{3}$$
Finalmente derivamos (3) para obtener que
$$-T_\alpha \cdot B_\alpha + (c-\alpha)\cdot -\tau_\alpha N_\alpha = \left(\frac{-\dot{\kappa_\alpha}}{\tau_\alpha\kappa_\alpha^2}\right)' \Leftrightarrow -\tau_\alpha\left((c-\alpha)\cdot N_\alpha\right) = \left(\frac{-\dot{\kappa_\alpha}}{\tau_\alpha\kappa_\alpha^2}\right)'.$$
Lo anterior junto con (2), tenemos que
$$\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = \left(\frac{\dot{\kappa_\alpha}}{\tau_\alpha\kappa_\alpha^2}\right)'. \tag{4}$$
□

2. Considere las esferas de ecuación $E_1 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ y $E_2 : x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$. La intersección de las esferas E_1 y E_2 es una curva que llamaremos α.

   a) Encuentre una parametrización de α.
   b) Encuentre la curvatura y torsión de α.

Solución.

a) De la primera y segunda ecuación se concluye que $z = y$. Reemplazando esto último en la ecuación $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ tenemos que $x^2 + y^2 + (y-1)^2 = 1$ que es equivalente, por completación de cuadrados, a

$$x^2 + \left(\sqrt{2}\left(y - \frac{1}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

De esta manera, tenemos que

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \quad \sqrt{2}\left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \quad \text{y} \quad z = y,$$

es decir

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \quad y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin t \quad \text{y} \quad z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin t.$$

Por lo tanto,

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin t\right), t \in \mathbb{R}$$

es una parametrización de la curva $E_1 \cap E_2$.

b) Unos cálculos muestran que

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\cos t\right) \\
\alpha''(t) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, -\frac{1}{2}\sin t, -\frac{1}{2}\sin t\right) \\
\alpha'(t) \times \alpha''(t) &= \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la curvatura es

$$\kappa_\alpha = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = (\sqrt{2})^3.$$

Como la curva α satisface que $z = y$ (ecuación de un plano), entonces concluímos que $\tau_\alpha = 0$ (Esto también se puede verificar haciendo los cálculos respectivos!!!).

□

3. *a*) Sea

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(y^2z + 2xz^2, 2xyz, xy^2 + 2x^2z\right).$$

Encuentre $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ y $f(1,1,1) = \sqrt{\pi}/17$.

b) Sea $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Calcular

$$\int_\alpha f,$$

donde f es la función escalar encontrada en la parte anterior.

Solución.

a) Calculamos la integral con respecto a x de la primera función coordenada,

$$\int y^2z + 2xz^2 dx = xy^2z + x^2z^2 + A(y,z). \tag{5}$$

Para calcular $A(y,z)$, derivamos (5) con respecto a y e igualamos con la segunda función coordenada,

$$2xyz + \frac{\partial A}{\partial y} = 2xyz. \tag{6}$$

De esto obtenemos que A no depende de la variable y. Repetimos el argumento con z y la tercera función coordenada, o sea

$$xy^2 + 2x^2z + \frac{\partial A}{\partial z} = xy^2 + 2x^2z. \tag{7}$$

Por tanto A tampoco depende de z. Luego, un potencial que sirve es

$$f(x,y,z) = xy^2z + x^2z^2 + A.$$

Imponemos la condición inicial, $f(1,1,1) = \sqrt{\pi}/17$, tenemos que

$$A + 2 = \frac{\sqrt{\pi}}{17} \Leftrightarrow A = \frac{\sqrt{\pi}}{17} - 2.$$

$$f(x,y,z) = xy^2z + x^2z^2 + \frac{\sqrt{\pi}}{17} - 2.$$

b) Calculamos $||\dot{\alpha}||$,

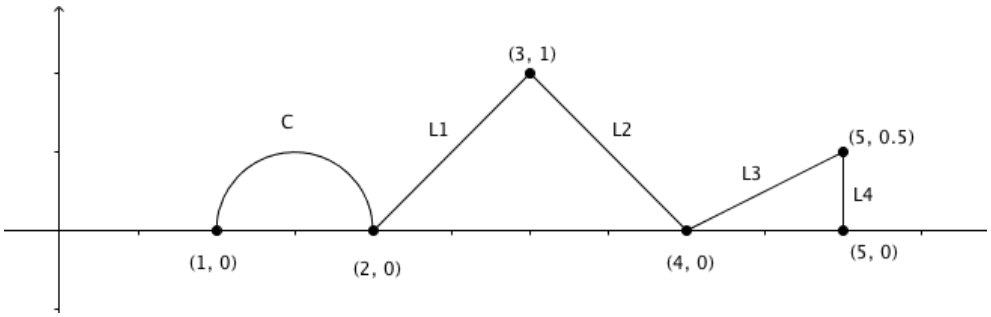
$$\dot{\alpha} = (-\sin(t), \cos(t), 1) \Rightarrow ||\dot{\alpha}|| = \sqrt{\cos(t)^2 + \sin(t)^2 + 1} = \sqrt{2}.$$

Por tanto la integral de linea de f con respecto a α corresponde a

$$\begin{aligned}\int_\alpha f &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left(\cos(t)\sin(t)^2 t + \cos(t)^2 t^2 + \frac{\sqrt{\pi}}{17} - 2\right) dt \\ &= \sqrt{2}\left(-\frac{7\pi}{2} + \frac{2\sqrt{\pi^3}}{17} + \frac{4\pi^3}{3}\right).\end{aligned}$$

□

4. Considere la curva α que une los puntos $(1,0)$ y $(5,0)$, recorrida en sentido antihorario, que se obtiene por yuxtaposición de las curvas C, L_1, L_2, L_3 y L_4 como lo muestra la siguiente figura.



Aquí, C es la circunferencia de centro $(3/2, 0)$ y radio $1/2$ y las curvas L_1, L_2, L_3 y L_4 son segmentos de rectas. Sea $\vec{F}$ el campo vectorial definido por

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - y, \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + x \right).$$

Calcular $\int\limits_{\alpha} \vec{F}$.

Solución. Primero que todo notar que si

$$P = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - y \quad \text{y} \quad Q = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + x$$

entonces

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2.$$

Sea β una curva que une los puntos $(1,0)$ y $(5,0)$, con la misma orientación que α, de modo que la curva $\beta^- \oplus \alpha$ tenga orientación positiva. De esta manera, por la fórmula de Green

$$\int\limits_{\alpha} \vec{F} = \int\limits_{\beta} \vec{F} + \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int\limits_{\beta} \vec{F} + 2 \cdot A(D),$$

donde D es el dominio interior a la curva $\beta^- \oplus \alpha$ y $A(D)$ es su área. Los cálculos se simplifican si escogemos $\beta(t) = (5-4t, 0)$, $t \in [0,1]$ (parametrización del segmento de recta que une los puntos $(1,0)$ y $(5,0)$ con la misma orientación que α). De esta manera, $A(D) = (\pi + 10)/8$ y

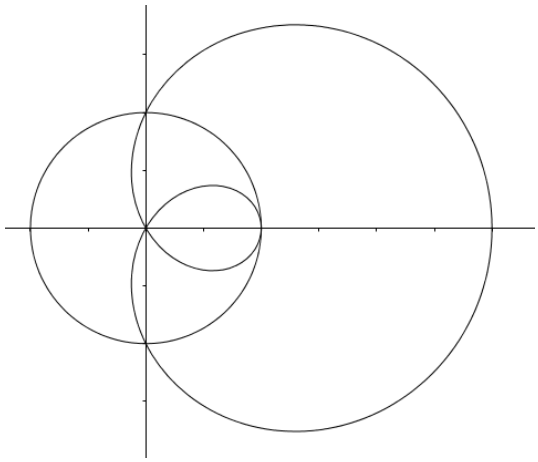
$$\int\limits_{\beta} \vec{F} = \int_0^1 \vec{F}(5-4t, 0) \cdot (-4, 0) dt = \int_0^1 \left(0, -\frac{1}{(5-4t)^2} + 5 - 4t \right) \cdot (-4, 0) dt = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\alpha} \vec{F} = \frac{\pi + 10}{4}.$$

□

5. En la siguiente figura se muestran las gráficas de las curvas polares $r = 1$ y $r = 1 + 2\cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.



Calcule el área de la región interior a $r = 2$ que se encuentra en el interior de $r = 1 + 2\cos\theta$ pero fuera del lazo de la curva $r = 1 + 2\cos\theta$.

Solución. El área de la región se calcula según

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/2} 1^2\, d\theta + \int_{\pi/2}^{2\pi/3} (1 + 2\cos\theta)^2\, d\theta - \int_{\pi}^{4\pi/3} (1 + 2\cos\theta)^2\, d\theta \\ &= 3\sqrt{3} - 4. \end{aligned}$$

□