Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
5 de Septiembre del 2017

MAT1630 ⋆ Cálculo III
Solución Interrogación 1

1. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ la curva definida por la intersección de dos superficies.

$$\Gamma : \begin{cases} y^2 + z^2 = 2z \\ y^2 + 4x = 0 \end{cases}$$

Determine una parametrización para Γ (se le está pidiendo que encuentre **una** función r y **un** intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que $r : I \to \mathbb{R}^3$ describa la curva completa).

Solución. Podemos notar que

$$y^2 + z^2 = 2z \qquad \Longleftrightarrow \qquad y^2 + (z-1)^2 = 1$$

ecuación de un cilindro. Luego, una parametrización de las coordenadas y y z de Γ son $y = \cos(t)$ y $z = 1 + \text{sen}(t)$, para $t \in [0, 2\pi]$. La coordenada $x = x(t)$ se obtiene de la ecuación $y^2 + 4x = 0$, vale decir $x(t) = -\dfrac{\cos^2(t)}{4}$. Por lo tanto, una parametrización para Γ es

$$\mathbf{r}(t) = \left(-\frac{\cos^2(t)}{4}, \cos(t), 1 + \text{sen}(t) \right), t \in [0, 2\pi].$$

2. Encuentre la parametrización en longitud de arco de la curva dado por

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{1+t^2} \begin{bmatrix} 3t \\ 3 \\ 1+t^2 \end{bmatrix}, \qquad t \geq 0.$$

Solución Tenemos

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} \frac{3(1+t^2)-6t^2}{(1+t^2)^2} \\ \frac{-6t}{(1+t^2)^2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(1+t^2)^2} \begin{bmatrix} 3-3t^2 \\ -6t \\ 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{\frac{(3-3t^2)^2}{(1+t^2)^4} + \frac{36t^2}{(1+t^2)^4}} \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^2} \sqrt{9 - 18t^2 + 9t^4 + 36t^2} \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^2} \sqrt{9(1+t^2)^2} \\ &= \frac{3(1+t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{3}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Luego, el longitud del arco esta dado por

$$s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)|du = \int_0^t \frac{3}{1+u^2}du = 3\tan^{-1}(t)$$

y tenemos

$$t = \tan(s/3).$$

Entonces,

$$\mathbf{r}(s) = \frac{1}{1+\tan^2(s/3)} \begin{bmatrix} 3\tan(s/3) \\ 3 \\ 1+\tan^2(s/3) \end{bmatrix}$$

que se pueda simplificar a

$$\mathbf{r}(s) = \begin{bmatrix} 3\,\mathrm{sen}(s/3)\cos(s/3) \\ 3\cos^2(s/3) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Determine la ecuación del plano osculador y la torsión para la curva

$$\alpha(t) = \left(\arctan(t), -\frac{1}{1+t}, \ln(t+\sqrt{1+t^2})\right), t > -1,$$

en el punto donde el vector tangente a la curva tiene la dirección de la recta

$$L: \qquad x+1 = y-1 = z-2\,.$$

Solución: El vector paralelo a la recta L es $v = (1,1,1)$. Entonces, la curva α tiene vector tangente en la dirección de la recta L si $\alpha'(t)$ es paralelo a v si y solo si $\alpha'(t) \times v = 0$. Tenemos que

$$0 = \alpha'(t)\times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{1+t^2} & \frac{1}{(1+t)^2} & \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, -\frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}\right)$$

de donde resulta $t = 0$. Además, tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha(0) &= (0,-1,0) \\
\alpha'(0) &= (1,1,1) \\
\alpha''(t) &= \left(-\frac{2t}{(1+t^2)^2}, -\frac{2}{(1+t)^3}, -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\right) \Longrightarrow \alpha''(0) = (0,-2,0) \\
\alpha'''(t) &= \left(\frac{-2+6t^2}{(1+t^2)^3}, \frac{6}{(1+t)^4}, \frac{2t^2-1}{(1+t^2)^{5/2}}\right) \Longrightarrow \alpha'''(0) = (-2,6,-1) \\
\alpha'(0)\times\alpha''(0) &= (2,0,-2)
\end{aligned}$$

Luego, la ecuación del plano osculador de la curva $\alpha(t)$ en el punto $\alpha(0) = (0,-1,0)$ es

$$[(x,y,z) - (0,-1,0)] \cdot (2,0,-2) = 0 \Longleftrightarrow x - z = 0$$

La torsión de la curva $\alpha(t)$ en el punto $\alpha(0) = (0,-1,0)$ es

$$\tau(0) = \frac{(\alpha'(0)\times\alpha''(0))\cdot\alpha'''(0)}{\|\alpha'(0)\times\alpha''(0)\|^2} = -\frac{1}{4}\,.$$

4. Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco con vector tangente unitario $T(s)$. Definimos la curva

$$\beta(t) = \int_a^t T(s) \times T'(s)\, ds\,.$$

Calcule la curvatura y torsión de β.

Solución: Sean $\{T, B.N\}$ el tiedro de Frenet de la curva α. Entonces, usando las ecuaciones de Frenet-Serret vemos que

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= T \times T' = T \times (\kappa N) = \kappa(T \times N) = \kappa B \\ \beta''(t) &= \kappa' B + \kappa B' = \kappa' B + \kappa(-\tau N) = \kappa' B - \kappa\tau N \end{aligned}$$

Se sigue que $\|\beta'(t)\| = \kappa\|B\| = \kappa$ y

$$\beta'(t) \times \beta''(t) = -\kappa^2\tau(B \times N) = \kappa^2\tau T \Longrightarrow \|\beta'(t) \times \beta''(t)\| = \kappa^2|\tau|\|T\| = \kappa^2|\tau|\,.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \beta'''(t) &= \kappa'' B + \kappa'(-\tau N) - (\kappa\tau)' N - \kappa\tau(-\kappa T + \tau B) \\ &= \kappa^2\tau T - (\kappa'\tau + (\kappa\tau)')N + (\kappa'' - \kappa\tau^2)B \end{aligned}$$

Entonces, $(\beta'(t) \times \beta''(t)) \cdot \beta'''(t) = (\kappa^2\tau)^2(T \cdot T) = (\kappa^2\tau)^2$. Por lo tanto, la curvavatura κ_β y la torsión τ_β de la curva β son:

$$\begin{aligned} \kappa_\beta(t) &= \frac{\|\beta'(t) \times \beta''(t)\|}{\|\beta'(t)\|^3} = \frac{\kappa^2|\tau|}{\kappa^3} = \frac{|\tau|}{\kappa} \\ \tau_\beta(t) &= \frac{(\beta'(t) \times \beta''(t)) \cdot \beta'''(t)}{\|\beta'(t) \times \beta''(t)\|^2} = \frac{(\kappa^2\tau)^2}{(\kappa^2|\tau|)^2} = 1\,. \end{aligned}$$

5. Considere la curva en $\mathbb{R}^2$ determinada por la ecuación $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$,

   a) Exprésela en coordenadas polares y grafíquela.

   b) Demuestre que su longitud total es $4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sec(2\theta)}\, d\theta$.

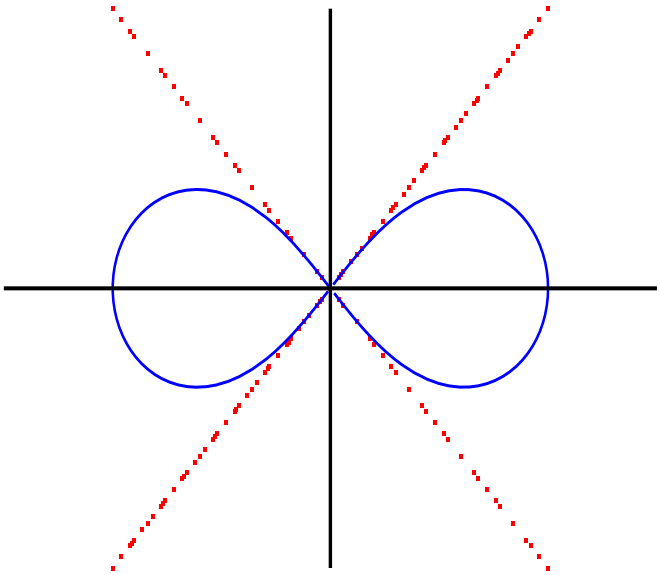
   c) Encuentre el área de la superficie encerrada por uno de sus bucles.

Solución

a) Expresando la curva en coordenadas polares

$x = \cos\theta,\ \ y = \operatorname{sen}\theta$ nos queda la ecuación $r^2 = \cos 2\theta$

Vemos así que los intervalos $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ están fuera de su dominio.



b) Por simetría su longitud L es $4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$

Tenemos que $r^2 = \cos(2\theta)$ por lo tanto $r'^2 = \dfrac{\operatorname{sen}^2(2\theta)}{\cos(2\theta)}$

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos(2\theta) + \frac{\operatorname{sen}^2(2\theta)}{\cos(2\theta)}}\, d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(2\theta) d\theta$$

c) Por simetría el área encerrada por uno de sus bucles es

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos(2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}$$