FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Interrogación 2
MAT1630 - Cálculo III

1. Sea $\vec{F}(x,y) = (y, -x)$.

   (a) Dibuje el campo vectorial.

   (b) ¿Es un campo conservativo en $\mathbb{R}^2$? Justifique.

   (c) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde C es el semicírculo

   $$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\},$$

   recorrido desde $(0,1)$ hacia $(0,-1)$.

   Solución:

   (a) **(15 pts)** Dibujo correcto del campo.

   (b) **(15 pts)** Justificación de que no es conservativo.

   (c) **(15 pts)** Parametriza la curva en el sentido correcto e indicando el dominio. Una posibilidad es

   $$\vec{r}(t) = \langle \cos(t), -\sin(t) \rangle \qquad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

   (d) **(15 pts)** Calcula la integral de línea.

   $$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \langle -\sin(t), -\cos(t) \rangle \cdot \langle -\sin(t), -\cos(t) \rangle \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$$

   .

2. Calcule el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ al recorrer la curva C una vez en sentido antihorario. $\vec{F}(x,y) = (e^x \cos y - y^3 \cos(y^3), e^x \sin y)$ y C delimita el rectángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,\pi)$, $(0,\pi)$, orientado en sentido antihorario.

   Solución:

   - **(15 pts)** Aplicación correcta del teorema de Green.
   - **(15 pts)** Cálculo de

   $$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2e^x \sin y + 3y^2 \cos(y^3) - 3y^5 \sin(y^3)$$

   .

- **(15 pts)** Escribe la integral iterada

$$\int_0^1 \int_0^\pi 2e^x \sin y \ + 3y^2 \cos(y^3) - 3y^5 \sin(y^3) dy dx$$

- **(15 pts)** Calcula

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^\pi 2e^x \sin y \ + 3y^2 \cos(y^3) - 3y^5 \sin(y^3) dy dx &= \int_0^1 y^3 \cos(y^3) - 2e^x \cos(y) \mid_0^\pi dx \\ &= \int_0^1 \pi^3 \cos(\pi^3) + 4e^x dx \\ &= \pi^3 \cos(\pi^3) + 4e - 4\end{aligned}$$

Alternativamente se puede calcular como integral de línea directamente.
El trabajo está dado por: $W = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$.
Separamos a la curva C en 4 tramos: $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ donde

$C_1 : r_1(t) = (1-t)(0,0) + t(1,0) = (t,0), t \in [0,1]$
$\quad r_1'(t) = (1,0)$
$C_2 : r_2(t) = (1-t)(1,0) + t(1,\pi) = (1,t\pi), t \in [0,1]$
$\quad r_2'(t) = (0,\pi)$
$C_3 : r_3(t) = (1-t)(1,\pi) + t(0,\pi) = (1-t,\pi), t \in [0,1]$
$\quad r_3'(t) = (-1,0)$
$C_4 : r_4(t) = (1-t)(0,\pi) + t(0,0) = (0,\pi - \pi t), t \in [0,1]$
$\quad r_4'(t) = (0,-\pi)$
$\quad W = \int_0^1 e^t dt + \int_0^1 e\pi \sin(\pi t) dt + \int_0^1 e^{1-t} + \pi^3 \cos\left(\pi^3\right) dt + \int_0^1 -\pi \sin(\pi - \pi t) dt$
$\quad W = e - 1 + 2e + e - 1 + \pi^3 \cos\left(\pi^3\right) - 2 = 4e - 4 + \pi^3 \cos\left(\pi^3\right)$

3. Calcule la integral de línea $\displaystyle\int_C z\, ds$ donde C es la curva de intersección entre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $z = y$, recorrida una vez en sentido antihorario visto desde arriba.

Solución:

- **(20 pts)** Parametriza: $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
- **(20 pts)** Calcula $ds = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{1 + \cos^2 t}$.
- **(20 pts)** $\int_{-\pi}^{\pi} \sin t \sqrt{1 + \cos^2 t} dt = 0$ pues el integrando es una función impar y el intervalo es simétrico. También puede cacular primitiva y evaluar.

4. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = \left\langle \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right\rangle$.

   (a) (20 puntos) Demuestre que $\vec{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   (b) (40 puntos) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ a lo largo de la curva que une $(0,-1)$ a $(1,0)$ siguiendo la parábola $y = x^2 - 1$.

Solución:

- **(20 pts)** Encuentra $f(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2}$ y dice que por eso es conservativo el campo. Si usa que las derivadas cruzadas coinciden, 0 puntos pues el dominio no es simplemente conexo.
- **(40 pts)** Calcula la integral o evalúa $f(1,0) - f(0,-1) = -1$.

Instrucciones:

- Cada pregunta vale 60 puntos.
- Justifica cada paso en las demostraciones.
- Simplifica las expresiones algebraicamente cuando sea posible.
- Duración: 120 minutos.