INTERROGACIÓN 2
I2 MAT1630 $\star$ Cálculo III

1. *a*) Demuestre que la relación $xy\,\mathrm{sen}(y) + ze^{xy} - z^2 = 0$ define implícitamente una función $z = f(x, y)$ en una vecindad del punto $P = (4, 0, 1)$ y encuentre la ecuación del plano tangente a z en dicho punto.

   b) Sea $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable en el punto $p \in \mathbb{R}^2$, donde tiene por matriz jacobiana a

   $$JG(p) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Suponga que el gradiente de la función compuesta $F \circ G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en el punto p es $\mathrm{grad}(F \circ G)\,(p) = (1, 1)$. Determine el vector gradiente de F en el punto $G(p)$.

Solución:

a) Sea $F(x, y, z) = xy\,\mathrm{sen}(y) + ze^{xy} - z^2$. Notemos que:

- $F(4, 0, 1) = 0$.
- $F_x(x, y, z) = y\,\mathrm{sen}(y) + yze^{xy}$, $F_y(x, y, z) = x(\mathrm{sen}(y) + y\cos(y)) + xze^{xy}$, $F_z(x, y, z) = e^{xy} - 2z$ son continuas.
- $F_z(4, 0, 1) = -1 \neq 0$.

Luego, aplicando el teorema de la función implícita, se concluye que en un entorno al punto P existe una función $z = f(x, y)$.

ahora bien

$$\frac{\partial z}{\partial x}(4, 0) = -\frac{F_x(4, 0, 1)}{F_z(4, 0, 1)} = -\frac{0}{-1} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(4, 0) = -\frac{F_y(4, 0, 1)}{F_z(4, 0, 1)} = -\frac{4}{-1} = 4$$

Luego la ecuación del plano tangente en el punto P es:

$$z = 1 + 0 \cdot (x - 4) + 4 \cdot (y - 0)$$

O bien

$$4y - z - 1 = 0$$

b) Si grad$F(G(p)) = (a, b)$, entonces ocupando el hecho de que F y G son diferenciables y la regla de la cadena tenemos que:

$$J\left(F \circ G\right)(p) = JF(G(p))JG(p)$$

Lo que es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Finalmente grad$F(G(p)) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

2. Considere las expresiones

$$x + y = e^u - e^v \qquad x^2 + y^2 = u + v$$

Demuestre que estas expresiones determinan funciones implícitas $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ en una vecindad del punto $P = (0, 0, 0, 0)$. Halle $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ en el origen.

Solución:

Consideremos las funciones $F(x, y, u, v) = x+y-e^u+e^v$ y $G(x, y, u, v) = x^2+y^2-u-v$. Notemos que:

- $F(0, 0, 0, 0) = 0$ y $G(0, 0, 0, 0) = 0$.
- $F(x, y, u, v)$ y $G(x, y, u, v)$ tienen derivadas parciales continuas.
- Como $\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -e^u & e^v \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = e^u + e^v$, entonces $\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}(P) = 2 \neq 0$.

Luego, aplicando el teorema de la función implícita, se concluye que en un entorno al punto P existen una función $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$.

Ahora bien, como

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} = \begin{vmatrix} 1 & e^v \\ 2y & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2ye^v$$

entonces

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}} = \frac{1 + 2ye^v}{e^u + e^v}$$

Derivando esto ultimo con respecto a x tenemos que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1 + 2ye^v}{e^u + e^v}\right) = \frac{2y\frac{\partial v}{\partial x}e^v(e^u + e^v) - (1 + 2ye^v)(\frac{\partial u}{\partial x}e^u + \frac{\partial v}{\partial x}e^v)}{(e^u + e^v)^2}$$

Calculando las derivadas faltantes tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}} = \frac{1 + 2xe^v}{e^u + e^v} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}} = \frac{2xe^u - 1}{e^u + e^v}$$

Finalmente evaluando en el origen tenemos que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0,0) = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0) + \dfrac{\partial v}{\partial x}(0,0)}{4} = -\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{4} = 0$$

3. Al evaluar una integral doble sobre una región D, se obtuvo una suma de integrales iteradas como sigue:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^a \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dxdy + \int_0^a \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dxdy + \int_a^{2a} \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dxdy$$

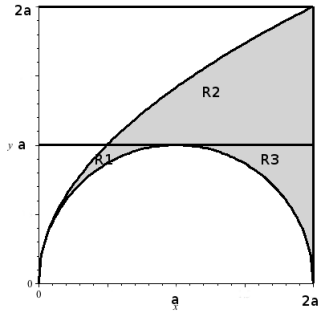
Bosqueje la región D y exprese la integral doble como una integral iterada con orden inverso de integración.

Solución:

Notemos que las relaciones involucradas son la circunferencia $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ y la parabola $2ax = y^2$ con $0 \leq y \leq 2a$. Sea $D = R1 \cup R2 \cup R3$ en donde:

$$R1 = \left\{(x,y) : 0 \leq y \leq a, \frac{y^2}{2a} \leq x \leq a - \sqrt{a^2-y^2}\right\}$$
$$R2 = \left\{(x,y) : 0 \leq y \leq a, a + \sqrt{a^2-y^2} \leq x \leq 2a\right\}$$
$$R3 = \left\{(x,y) : a \leq y \leq 2a, \frac{y^2}{2a} \leq x \leq 2a\right\}$$

El bosquejo de la región D es:



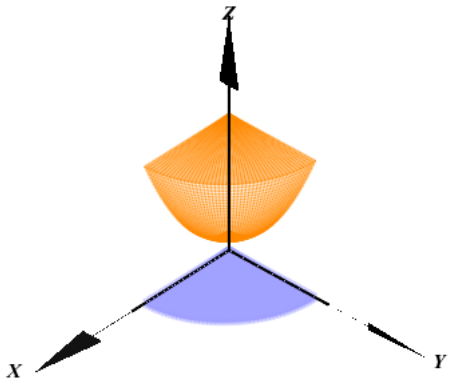
De la figura vemos que la región es directamente una región tipo I en donde $0 \leq x \leq 2a$ e $\sqrt{a^2-(x-a)^2} \leq y \leq \sqrt{2ax}$. Es decir

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2a} \int_{\sqrt{a^2-(x-a)^2}}^{\sqrt{2ax}} dydx$$

4. *a*) Hallar el volumen del sólido acotada por el paráboloide $z = 1 + 2x^2 + 2y^2$ y el plano $z = 7$ en el primer octante.

Solución:

La región de integración D es el cuarto de la circunferencia $7 = 1 + 2x^2 + 2y^2$ que esta sobre el primer cuadrante del plano XY, es decir $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 3, x \geq 0, y \geq 0\}$. La siguiente figura muestra el solido en naranjo y la región D en azul.



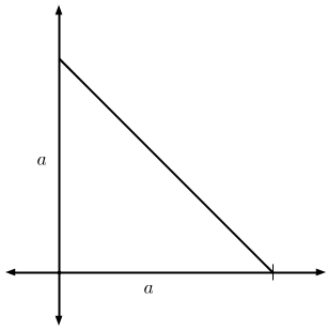
Si llamamos V al volumen del solido y ocupando coordenadas polares se tiene que:

$$V = \iint_D 7 - (1 + 2x^2 + 2y^2)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{3}} (6 - 2\rho^2)\rho d\rho d\theta = \frac{9\pi}{4}$$

b) Halle el centro de masa de una lámina en la forma de un triángulo isósceles recto con lados iguales de longitud a si la densidad en cualquier punto es proporcional al cuadrado de la distancia desde el vértice opuesto a la hipotenusa.

Solución:

Sin perdida de generalidad podemos considerar que los lados triángulo coinciden con los ejes coordenados y que el vértice opuesto a la hipotenusa esta en el origen como muestra la siguiente figura:



La función densidad esta dada por $\rho(x,y) = k(x^2+y^2)$ definida en $T = \{(x,y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a-x\}$. Luego la masa M esta dada por

$$M = \iint_T \rho(x,y)dxdy = \int_0^a \int_0^{a-x} k(x^2+y^2)dydx = \frac{ka^4}{6}$$

Calculamos los momentos M_x y M_y.

$$M_x = \iint_T y\rho(x,y)dxdy = \int_0^a \int_0^{a-x} ky(x^2+y^2)dydx = \frac{ka^5}{15}$$

$$M_y = \iint_T x\rho(x,y)dxdy = \int_0^a \int_0^{a-x} ky(x^2+y^2)dydx = \frac{ka^5}{15}$$

Finalmente se tiene que

$$(\overline{x},\overline{y}) = \left(\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M}\right) = \left(\frac{5a}{2}, \frac{5a}{2}\right)$$

TIEMPO: 120 minutos
Justifique sus respuestas