Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2016

MAT1630 ⋆ Cálculo 3

Examen

1. Considere la curva Γ dada en forma paramétrica:

$$\vec{r}(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t)$$

Determine una parametrización respecto a longitud de arco de la curva Γ.

Solución. Calculemos $s(t)$,

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\dot{\vec{r}}(u)\| \, du \\ &= \int_0^t \|(e^u(\cos(u) - \sin(u)), e^u(\sin(u) + \cos(u)), e^u)\| \, du \\ &= \sqrt{3} \int_0^t e^u du \\ &= \sqrt{3}(e^t - 1) \end{aligned}$$

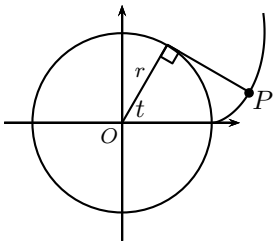
De este modo $t = \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right)$ y la arcoparametrización es

$$\vec{r}(s) = \left(1 + \tfrac{s}{\sqrt{3}}\right)\left(\cos\left(\ln\left(1 + \tfrac{s}{\sqrt{3}}\right)\right), \sin\left(\ln\left(1 + \tfrac{s}{\sqrt{3}}\right)\right), 1\right)$$

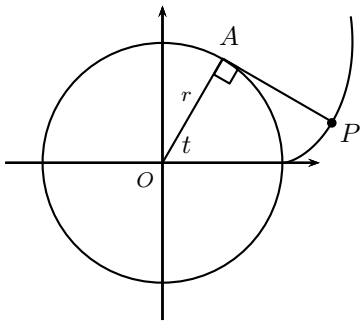
Evaluación.

- Asignar (**1.5 pto**) por calcular correctamente $\dot{\vec{r}}(u)$.
- Asignar (**1.5 pto**) por obtener que $s(t) = \sqrt{3}\int_0^t e^u du$. La integral también puede partir de cualquier otro número diferente a cero.
- Asignar (**1 pto**) por obtener que $s(t) = \sqrt{3}(e^t - 1)$. Puede haber una diferencia en la parte constante dependiendo del índice de partida para la integral.
- Asignar (**1 pto**) por obtener que $t = \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right)$.
- Asignar (**1 pto**) por remplazar $t = t(s)$ en la parametrización original.

2. Se enrolla una cuerda alrededor de un círculo y luego se desenrolla mientras se mantiene tensa (ver la figura). El círculo tiene radio r y centro O, y la posición inicial de P es $(r, 0)$. Determine las coordenadas del punto P como función del ángulo t de la figura.



Solución. Consideremos la figura



El segmento $\overline{AP}$ mide el perímero de la sección circular asociada al ángulo t, vale decir

$$AP = t \cdot r$$

Las coordenadas del punto P corresponden al vector $\overrightarrow{OP}$, luego

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

y por tanto las coordenadas de P están dadas por

$$(x, y) = r(\cos(t), \sin(t)) + t \cdot r(\sin(t), -\cos(t))$$

es decir,

$$x = r(\cos(t) + t\sin(t)) \qquad \text{e} \qquad y = r(\sin(t) - t\cos(t))$$

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por determinar la medida del segmento $\overline{AP}$.
- Asignar (**2 ptos**) por determinar la coordenada x del punto P.
- Asignar (**2 ptos**) por determinar la coordenada y del punto P.

3. Calcule la curvatura de la curva cicloide $\vec{r}(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, para todo $t \in (0, 2\pi)$.

Solución. Consideremos la curva en $\mathbb{R}^3$

$$\vec{r}(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t), 0)$$

Ahora calculamos la primera y segunda derivada

$$\dot{\vec{r}}(t) = (1 - \cos(t), \sin(t), 0)$$
$$\ddot{\vec{r}}(t) = (\sin(t), \cos(t), 0)$$

Luego,

$$\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) = (0, 0, \cos(t) - 1) \qquad \Longrightarrow \qquad \|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\| = |\cos(t) - 1|$$

Además,

$$\|\dot{\vec{r}}(t)\| = \sqrt{2 - 2\cos(t)}$$

Finalmente, la curvatura para todo $t \in (0, 2\pi)$ es

$$\kappa(t) = \frac{|\cos(t) - 1|}{\sqrt{2 - 2\cos(t)}} = |\cos(t/2)|$$

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\dot{\vec{r}}(t)$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\ddot{\vec{r}}(t)$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\|$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\|\dot{\vec{r}}(t)\|$.
- Asignar (**1 ptos**) por obtener que $\kappa(t) = |\cos(t/2)|$.

4. Sea $\vec{\alpha}(s)$ una curva en $\mathbb{R}^3$ parametrizada respecto a longitud de arco con $T(s)$, $N(s)$ y $B(s)$ sus vectores tangente, normal y binormal, respectivamente. Si la torsión es constante, demuestre que la curva paramétrica

$$\vec{\beta}(s) = -\frac{N(s)}{\tau} + \int_0^s B(t)\,dt$$

tiene curvatura constante.

Solución. La curvatura de β está dada por:

$$k_\beta = \frac{\|\beta'(s) \times \beta''(s)\|}{\|\beta'(s)\|^3}.$$

Así, calculamos

$$\begin{aligned}
\beta'(s) =& \frac{-1}{\tau}(-kT(s) + \tau B(s)) + B(s) = \frac{k}{\tau}T(s) \\
\beta''(s) =& \left(\frac{k}{\tau}\right)' T(s) + \frac{k^2}{\tau}N(s) \\
\beta'(s) \times \beta''(s) =& \frac{k^3}{\tau^2}B(s) \\
\|\beta'(s) \times \beta''(s)\| =& \frac{k^3}{\tau^2} \\
\|\beta'(s)\|^3 =& \frac{k^3}{\tau^3}
\end{aligned}$$

Así,

$$k_\beta = \tau = cte.$$

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\beta'(s)$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\beta''(s)$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\beta'(s) \times \beta''(s)$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\|\beta'(s) \times \beta''(s)\|$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\|\beta'(s)\|$.
- Asignar (**1 ptos**) por obtener que $\kappa_\beta = \tau$.

5. Determine el área de la superficie de revolución que resulta al rotar la astroide de ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ en torno al eje X.

Solución. El área de superficie está dada por:

$$S = \int_a^b 2\pi y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

La astroide está parametrizada por:

$$x(t) = \cos^3(t), \quad y(t) = \sin^3(t) \quad t \in [0, \pi/2].$$

Note que el intervalo del parámetro t representa a la curva del primer cuadrante.

Así, calculamos

$$\begin{aligned} S =& \int_0^{\pi/2} 2\pi \sin^3(t)\sqrt{(-3\cos^2(t)\sin(t))^2 + (3\sin^2(t)\cos(t))^2}dt \\ =& 6\pi \int_0^{\pi/2} \sin^4(t)\sqrt{\cos^4(t) - \sin^4(t) + \sin^2(t)}dt \\ =& 6\pi \int_0^{\pi/2} \sin^4(t)\cos(t)dt \\ =& \frac{6\pi}{5}. \end{aligned}$$

Como al rotar en torno al eje X la curva en el intervalo $[\pi/2]$ obtengo la mitad de la superficie de revolución, entonces el área es $\dfrac{12\pi}{5}$.

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por determinar una parametrización correcta para la curva.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $x'(t)$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $y'(t)$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = 3\sin^4(t)\cos(t)$.
- Asignar (**2 ptos**) por calcular el área de la superficie.

6. Calcular la integral de línea

$$\int_\Gamma (2xy^2 + y)dx + (2x^2y + x + x^2/2)dy$$

siendo Γ la curva $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $y \geq 0$, recorrida en sentido antihorario.

Solución. Note que Γ es una curva abierta, por lo que para usar el Teorema de Green, debemos cerrar la curva. Sea $\tilde{\Gamma}$ la recta $y = 0$ entre los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$.

Entonces, usando el Teorema de Green, obtenemos que:

$$\int_{\Gamma\cup\tilde{\Gamma}} Pdx + Qdy = \int\int_D \frac{dQ}{dx} - \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{y}}dA,$$

donde

$$\begin{aligned} P =& 2xy^2 + y \\ Q =& 2x^2y + x + x^2/2 \\ \frac{dP}{dy} =& 4xy + 1 \\ \frac{dQ}{dx} =& 4xy + 1 + x. \end{aligned}$$

Así,

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy = \int\int_D \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}dA - \int_{\tilde{\Gamma}} Pdx + Qdy.$$

Además, la región encerrada D está dada por

$$D = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad y \geq 0\},$$

entonces

$$\begin{aligned} \int\int_D \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}dA =& \int\int_D xdA \\ =& \int_{-a}^{a}\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} xdydx \\ =& b\int_{-a}^{a} x\sqrt{1 - x^2/a^2}dx \\ =& 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que $\tilde{\Gamma}$ puede ser parametrizada por

$$r(t) = (at, 0), \quad t \in [-1, 1],$$

entonces

$$\int_{\tilde{\Gamma}} Pdx + Qdy = \int_{\tilde{\Gamma}} Pdx = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_\Gamma (2xy^2 + y)dx + (2x^2y + x + x^2/2)dy = 0.$$

Evaluación.

- Asignar (**1 pto**) por concluir que $Q_x - P_y = x$.

- Asignar (**2 pto**) por cerrar la curva Γ. En caso contrario no se asignará puntaje.

  IMPORTANTE. Todo el puntaje que sigue se asignará únicamente si el alumno cerró la curva. En caso contrario no se asignará puntaje.

- Asignar (**1 pto**) por calcular $\oint_{\Gamma \cup \Gamma'} F \cdot dr$, para $\tilde{\Gamma}$ la curva que haya elegido el alumno. Puede hacerlo directa o por Green
- Asignar (**1 pto**) por calcular $\int_{\tilde{\Gamma}} F \cdot dr$, para $\tilde{\Gamma}$ la curva que haya elegido el alumno.
- Asignar (**1 pto**) por determinar el valor $\int_{\Gamma} F \cdot dr$ a partir de los cálculos anteriores.

7. Calcule, usando el teorema de Stokes, el trabajo realizado por la fuerza $F(x,y,z) = (2x+y-z, 2x+z, 2x-y-z)$ al mover una partícula a lo largo de la curva Γ dada por

$$\Gamma : \begin{cases} 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

donde la orientación de Γ se escoge de modo que la curva que se obtiene al proyectar Γ sobre el plano $z = 0$ esta orientada positivamente.

Solución.

Alternativa 1. Por el teorema de Stokes

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot dr = \int\int_S \text{rot}(\vec{F}) dS,$$

donde S es cualquier superficie con frontera Γ y la orientacin de S se escoge segn la orientacin la curva Γ. Dos alternativas para S son $S_1 : 2x - z = 0$, $2x^2 + y^2 \leq 1$ y $S_2 : 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$, $2x^2 + y^2 \leq 1$, pero los cálculos se facilitan si escogemos $S_1 : 2x - z = 0$, $2x^2 + y^2 \leq 1$. Notar que S_1 se puede parametrizar como

$$\varphi(u,v) = (u, v, 2u), \quad 2u^2 + v^2 \leq 1$$

donde, según la orientación de Γ, el vector normal de S es $\vec{N} = (-2, 1, 0)$. Así

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \vec{F} \cdot dr &= \int\int_S rot(\vec{F}) dS \\ &= \int\int_{2u^2+v^2\leq 1} rot(\vec{F})(\varphi(u,v)) \cdot \vec{N} d(u,v) \\ &= \int\int_{2u^2+v^2\leq 1} (-2,-3,1) \cdot (-2,0,1) dS \\ &= \frac{5}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr d\theta = \frac{5\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Alternativa 2. Otra alternativa equivalente es considerar la parametrizaciń

$$\psi(r,\theta) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \cos\theta, r\sin\theta, \frac{2r}{\sqrt{2}} \cos\theta \right), \quad r \in [0,1],\ \theta \in [0, 2\pi]$$

de S_1 con vector normal $\vec{n} = (-2r/\sqrt{2}, 0, r/\sqrt{2})$.

Evaluación.

- Asignar (**1.5 pto**) por calcular el rotor de F.
- Asignar (**1.5 pto**) por alguna parametrización de la superficie dada para el Teorema de Stokes.
- Asignar (**1 pto**) por calcular la normal o normal unitaria a la superficie.
- Asignar (**1 pto**) por cambio de variable que permita calcular la integral.
- Asignar (**1 pto**) por calcular la integral y concluir el resultado pedido.

8. Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq a\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, z = a\}$ la superficie orientada según los vectores normales apuntando hacia el exterior. Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\int_S F \cdot N \, dS = 10\pi$$

donde $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ y N la normal unitaria a la superficie apuntando hacia afuera.

Solución. Sea $S_1 = S \cup S_2$, donde $S_2 = \{(x,y,z) \, : \, x^2 + y^2 \leq 4, \, z = 0\}$. Luego

$$10\pi = \int_S \vec{F} \cdot dS = \int_{S_1} \vec{F} \cdot dS - \int_{S_2} \vec{F} \cdot dS. \tag{1}$$

Sea A la región interior a S_1, por el teorema de la divergencia

$$\begin{aligned}
\int_{S_1} \vec{F} \cdot dS = \int\int\int_A div(\vec{F}) dV &= \int\int\int_A 2(x+y+z) dV \\
&= \int\int_{x^2+y^2 \leq 4} \left(\int_0^a 2(x+y+z) dz \right) d(x,y) \\
&= \int\int_{x^2+y^2 \leq 4} 2a(x+y) d(x,y) + 4\pi a^2 \\
&= 2a \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 (\cos\theta + \sin\theta) dr d\theta + 4\pi a^2 = 4\pi a^2
\end{aligned}$$

Por otra parte, la superficie S_2 se parametriza como $\varphi(u,v) = (u,v,0)$, $(u,v) \in \{u^2 + v^2 \leq 4\}$ con vector normal $\vec{N} = (0,0,-1)$. Así

$$\int_{S_2} \vec{F} \cdot dS = \int\int_{u^2+v^2 \leq 4} (u^2, v^2, 0) \cdot (0,0,-1) dA = 0.$$

Finalmente, de (1) obtenemos que $10\pi = 4a^2\pi$, es decir $a = \sqrt{10}/2$.

Evaluación.

- Asignar (**1 pto**) por tapar la superficie.
- Asignar (**1 pto**) por calcular $\nabla \cdot F$
- Asignar (**0.5 pto**) por hacer cambio de variable para calcular la integral de volumen.
- Asignar (**1 pto**) por calcular la integral de volumen.
- Asignar (**0.5 pto**) por cambio de variable que permita calcular la integral de superficie.
- Asignar (**1 pto**) por calcular la integral de superficie.
- Asignar (**1 pto**) por determinar correctamente el valor de a.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

TIEMPO: 150 MINUTOS

SIN CONSULTAS

SIN CALCULADORA

PROHIBIDO TENER CELULAR SOBRE LA MESA