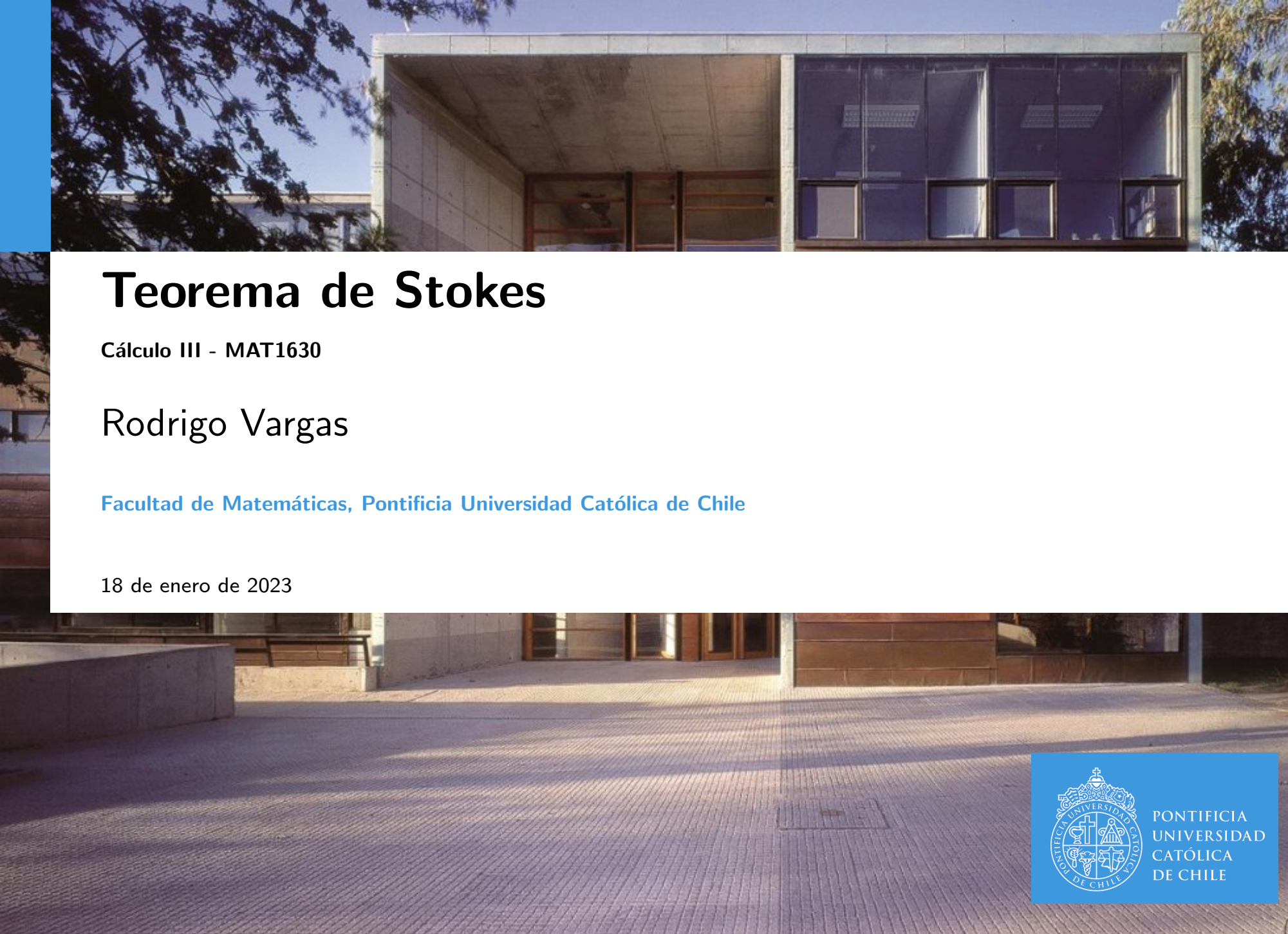


Teorema de Stokes

Cálculo III - MAT1630

Rodrigo Vargas

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile

18 de enero de 2023

Teoremas de Stokes

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Definición.

Si $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ de clase C^1, entonces el **rotacional** de $\mathbf{F}$ es el campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Se presenta el operador diferencial vectorial ∇ como

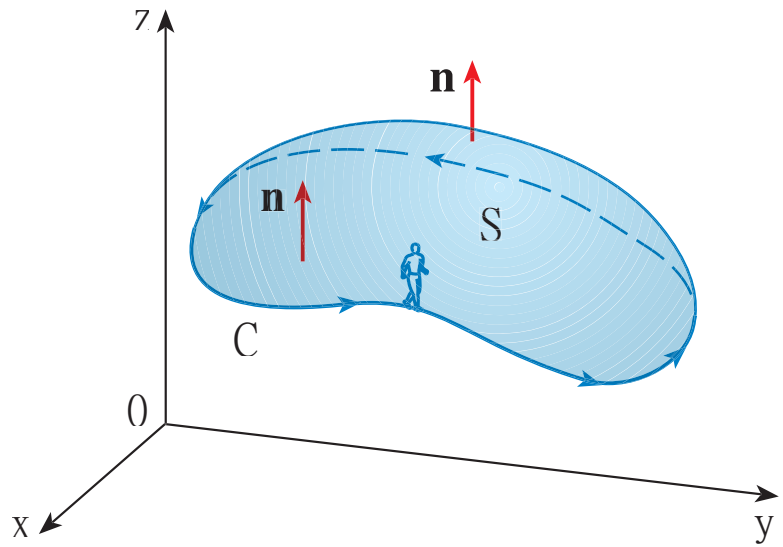
$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Si se piensa que ∇ es un vector entonces

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \text{rot}(\mathbf{F})$$

Teoremas de Stokes

Sea S una superficie orientada con vector unitario $\mathbf{n}$. La orientación S induce la orientación positiva de la curva frontera C ilustrada en la figura.



Esto quiere decir que si usted camina en la dirección positiva alrededor de C con su cabeza señalando en la dirección de $\mathbf{n}$, entonces a superficie siempre quedará a su izquierda.

Teoremas de Stokes

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Teorema. (Teorema de Stokes)

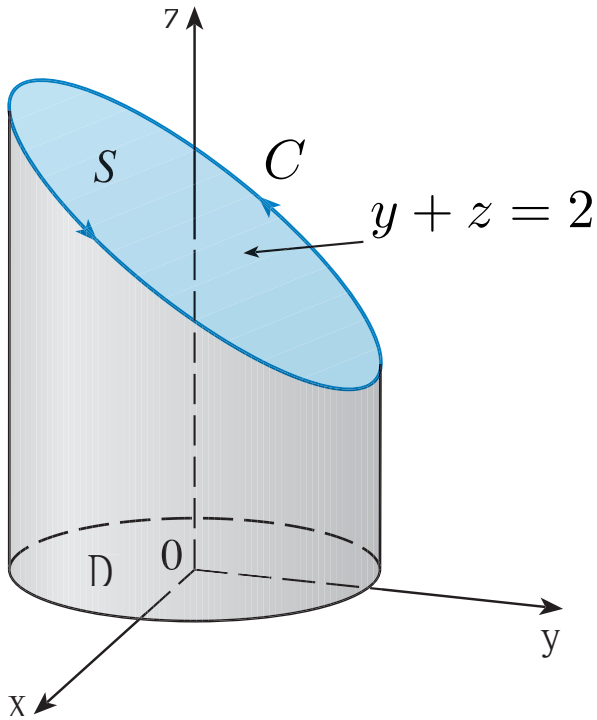
Sea S una superficie regular por segmentos y orientada que está acotada por una curva C regular a tramos, simple y cerrada con orientación positiva.
Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial de clase C^1 en una región abierta que contiene a S. Entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha = \iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot dS \, .$$

Teoremas de Stokes

EJEMPLO 1 Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ y

C es la curva de intersección del plano $y + z = 2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. (La orientación de C es en el sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se le ve desde arriba.)



Teoremas de Stokes

EJEMPLO 2 Mediante el teorema de Stokes, calcule la integral $\iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot dS$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ y S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está situada en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y encima del plano xy.

