Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Calculo III - MAT1630
Profesor: Giancarlo Urzua
Ayudante: Jorge Andrés Matamala O. (jnmatamala@uc.cl)

Ayudantía 3

Curvatura y planos en una curva

1. Resumen de contenidos

Un plano se determina con un punto $\vec{p_0} = (x_0, y_0, z_0)$ y un vector $\vec{n} = (a, b, c)$ perpendicular al plano, donde $\vec{r} = (x, y, z)$

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{p_0}) = 0 \Rightarrow (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

Vectores tangente, normal y binormal

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} \qquad N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|} \qquad B(t) = T(t) \times N(t)$$

Si la curva f está reparametrizada por longitud de arco

$$f'(s) = T(s) \qquad \kappa(s) = |\frac{dT}{ds}| \qquad T'(s) = k(s)N(s)$$

$$((x, y, z) - f(s)) \cdot T(s) = 0 \rightarrow \textit{ El Plano normal que pasa por } f(s) \textit{ y tiene por vector normal } T(s)$$

$$((x, y, z) - f(s)) \cdot N(s) = 0 \rightarrow \textit{ El Plano rectificante que pasa por } f(s) \textit{ y tiene por vector normal } N(s)$$

$$((x, y, z) - f(s)) \cdot B(s) = 0 \rightarrow \textit{ El Plano osculador que pasa por } f(s) \textit{ y tiene por vector normal } B(s)$$

Si la curva NO está reparametrizada por longitud de arco, se deben calcular los vectores u, v, w de la forma

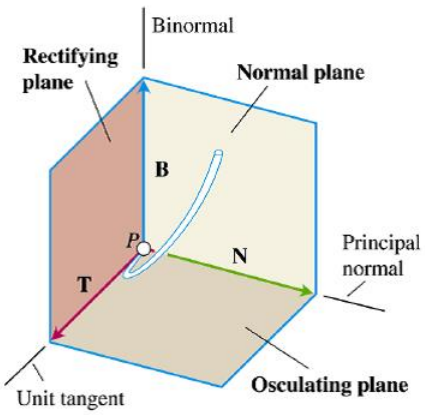
$$u = f'(t) \qquad v = f'(t) \times f''(t) \qquad w = v \times u$$

$$((x, y, z) - f(t)) \cdot w = 0 \rightarrow \textit{ Plano rectificante}$$

$$((x, y, z) - f(t)) \cdot u = 0 \rightarrow \textit{ Plano normal}$$

$$((x, y, z) - f(t)) \cdot v = 0 \rightarrow \textit{ Plano osculador}$$

Notar que si u, v, w son normalizados, se obtiene a los vectores tangente, binormal y normal.



$$\kappa = |\frac{T'(t)}{r'(t)}| = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3}$$

Si la curva es plana -vector binormal constante,posee una ecuación del tipo $y = f(x)$-, κ toma la siguiente forma

$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

La circunferencia que se localiza en el plano osculador de la curva en un punto P posee un radio de curvatura $r = \frac{1}{\kappa}$ y es llamada la circunferencia osculadora de C en un punto P. Esta circunferencia comparte la misma tangente, normal y curvatura que la curva en P.

2. Problemas

Problema 1

Encuentre la ecuación del plano osculador que resulta de la intersección de las curvas $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ y $x^2 + y^2 = z$ en el punto (1,1,2). Además, encuentre los vectores tangente unitario, normal unitario y binormal en el mismo punto.

Problema 2

Determine la ecuación del plano osculador de la función parametrizada como

$$f(t) = (arctan(t)\ , -\frac{1}{1+t}\ ,\ ln(t + \sqrt{1+t^2})$$

en el punto donde el vector tangente de la curva tiene la misma dirección de la recta

$$x + 1 = y - 1 = z - 2$$

Problema 3

Considere la hélice $r(t) = (cos(t), sen(t), e^t)$

1. Encuentre la recta tangente y el plano normal a la curva en el punto f(0)
2. Pruebe que la intersección de cualquier recta tangente a la curva con el plano XY entrega un punto sobre el círculo $x^2 + y^2 = 2$
3. Determine en que punto (si lo hay) la curva correspondiente atraviesa el plano YZ perpendicularmente

Problema 4

Dada la curva de ecuaciones paramétricas

$$x(t) = sen(t) \qquad y(t) = \frac{t}{\pi} \qquad z(t) = cos(2t)$$

1. Halle los vectores tangente unitario, normal unitario y binormal en el punto $(1, \frac{1}{4}, 0)$
2. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado
3. Determine las ecuaciones del plano normal y osculador en el punto dado
4. Halle el ángulo que forma el vector tangente unitario calculado en 1. con el semieje positivo de z

Problema 5

Sea la curva descrita por la ecuación paramétrica

$$(e^t,\ 2\sqrt{2}e^{\frac{t}{2}},\ t)$$

1. Encuentre la eucación del plano normal en $(1\ ,\ 2\sqrt{2},\ 0)$
2. Halle el o los valores de la constante k para que la recta que tiene como vector director

$$v = (k^3 - k^2, \sqrt{2}k, 3k^2 - k)$$

   sea paralelo al plano normal encontrado en 1.
3. Encuentre, si es que existe, un valor t que cumpla $|r'(t)| = 9$

Problema 6

Sea una curva Γ que está contenida en una esfera de radio r. Demuestre que su curvatura κ satisface

$$k(s) \geq \frac{1}{r}$$

Hint: $|\vec{A} \cdot \vec{B}| \leq |\vec{A}||\vec{B}|$