Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Calculo III - MAT1630
Profesor: Giancarlo Urzua
Ayudante: Jorge Andrés Matamala O. (jnmatamala@uc.cl)

Ayudantía 6

Trabajo e integrales de línea en campos vectoriales

1. Resumen

La integral de línea del campo vectorial F sobre la curva C parametrizada por $r(t)$ es

$$\int_C F \cdot dr = \int_C F \cdot T \; ds = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) \; dt$$

Cuando se trabaja con campos vectoriales, **sí importa la orientación de la parametrización**. Hay que tener ojo si vamos de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, esto es

$$\int_C F \cdot dr = -\int_{-C} F \cdot dr$$

La relación entre integrales de línea de campos escalares y vectoriales es la siguiente

$$\int_C F \cdot dr = \int_C P \; dx + Q \; dy + R \; dz \qquad donde \; F = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$$

En chileno, lo anterior se refiere a que la integral de linea de campo vectorial no es más que la suma de la integral de línea de la cada componente del campo (P,Q,R) respecto a x,y,z (se están sumando integrales de campo escalar).

Teorema fundamental de las integrales de línea

$$\int_C F \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr = f(r(b)) - f(r(a))$$

Formas de decir que un campo vectorial es conservativo

1. Si $\int_C F \cdot dr = 0$ para una trayectoria cerrada en el campo en la región D simplemente conexa, entonces $\int_C F \cdot dr$ es independiente de la trayectoria
2. Si el campo tiene derivadas parciales continuas en la región D simplemente conexa y $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
3. El campo F deriva de un potencial, $F = \nabla f$

2. Problemas

Problema 1

Encuentre el valor de b >0 que minimiza el trabajo producido al mover una partícula sometida al campo

$$F(x, y) = (3y^2 + 2, 16x)$$

Desde el punto (-1,0) al punto (1,0) a lo largo de la semielipse $b^2x^2 + y^2 = b^2$ con y mayor que cero.

Problema 2

Dado el campo $F(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$

1. Determine si el campo es conservativo
2. Determine el valor de la integral de línea del campo F sobre la curva C parametrizada por

$$r(t) = (sec(t), sen(t + \frac{\pi}{4})) \qquad t \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

Problema 3

Considere C una curva suave parametrizada por longitud de arco $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ con cada componente definido en [a,b] con dos derivadas continuas. Calcule

$$\int_C r'' \cdot dr \qquad \int_C r \times r' \cdot dr$$

Problema 4

Calcule el trabajo realizado por el campo $F = (P, Q)$ donde

$$P(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2} + x^3 \qquad Q(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} + y^4$$

Sobre una partícula de masa m que se desplaza en el semiplano superior en la curva que comienza con el segmento rectilíneo desde (-1,1) hasta (-2,0), luego por la curva $y = \sqrt{4 - x^2}$ hasta el punto (2,0) y luego por un segmento rectilíneo hasta el punto (2,2).

Problema 5

Un hombre que pesa 70 kilogramos sube un tarro de pintura de 10 kilogramos por una escalera helicoidal que rodea a un silo con radio de 6 metros. Si el silo es de 30 metros de alto y el hombre da tres revoluciones hasta la parte alta, ¿cuánto trabajo efectúa contra la fuerza de gravedad?