Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

MAT 1630
Tercera prueba

1) Determinar el trabajo realizado por el campo

$$\vec{F} = (3x - 4y + 2z)\hat{i} + (4x + 2y - 3z^2)\hat{j} + (2xz - 4y^2 + z^3)\hat{k}$$

al mover una partícula a lo largo de todo el contorno de la elipse

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

---

2) a) Demostrar que el valor de

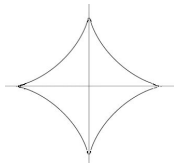
$$\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)\,dx + (6x^2y - 3xy^2)\,dy$$

es independiente de la trayectoria. Calcular dicho valor.

b) Calcular

$$\oint_C (x^2 y\cos x + 2xy\,\mathrm{sen}\,x - y^2e^x)dx + (x^2\,\mathrm{sen}\,x - 2ye^x)dy$$

siendo $C : x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

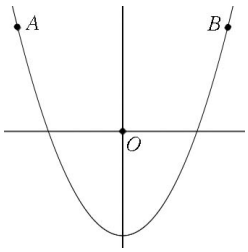


---

3) Calcular el valor de

$$\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

siendo C el arco de $y = 2x^2 - 1$ que va desde $A : (-1, 1)$ hasta $B : (1, 1)$.



---

4) Sea Σ la parte de la superficie $x^2 + y + z^2 = 1$ correspondiente a $y \geq 0$.

a) Calcular el área de Σ.

b) Calcular $\iint_\Sigma \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS$, siendo $\vec{F} = (x, -y, 1)$ y $\hat{n}$ normal a Σ.

JUSTIFIQUE SUS RESPUESTAS

Tiempo: dos horas
5 de noviembre de 2014

1) Determinar el trabajo realizado por el campo

$$\vec{F} = (3x - 4y + 2z)\hat{i} + (4x + 2y - 3z^2)\hat{j} + (2xz - 4y^2 + z^3)\hat{k}$$

al mover una partícula a lo largo de todo el contorno de la elipse

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Si la trayectoria se parametriza

$$\left.\begin{aligned} x &= 4\cos t \\ y &= 3\operatorname{sen} t \\ z &= 0 \end{aligned}\right\};\quad \text{con lo cual} \quad \begin{cases} dx = -4\operatorname{sen} t\, dt \\ dy = 3\cos t\, dt \\ dz = 0 \end{cases}$$

el trabajo pedido es

$$\begin{aligned} W &= \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \oint \left(3x - 4y + 2z,\quad 4x + 2y - 3z^2,\quad 2xz - 4y^2 + z^3\right) \cdot (dx, dy, dz) \\ &= \int_0^{2\pi} \left((3 \cdot 4\cos t - 4 \cdot 3\operatorname{sen} t)(-4\operatorname{sen} t) + (4 \cdot 4\cos t + 2 \cdot 3\operatorname{sen} t)(3\cos t)\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(48 - 30\operatorname{sen} t \cos t\right) dt = 48t - 15\operatorname{sen}^2 t \Big|_0^{2\pi} \\ &= 96\pi \end{aligned}$$

2) a) Demostrar que el valor de

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)\,dx + (6x^2y - 3xy^2)\,dy$$

es independiente de la trayectoria. Calcular dicho valor.

b) Calcular

$$\oint_C (x^2 y\cos x + 2xy\,\mathrm{sen}\,x - y^2 e^x)dx + (x^2\,\mathrm{sen}\,x - 2ye^x)dy$$

siendo $C: x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

---

a) Siendo aquí

$$P = 6xy^2 - y^3; \qquad Q = 6x^2y - 3xy^2,$$

resulta, para todo el plano *Oxy*,

$$P_y = 12xy - 3y^2 = Q_x$$

de modo que el valor de la integral *I* es independiente de la trayectoria; por ejemplo,

i) como la recta entre los dos puntos es $y = x + 1,$:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 \left(6x(x+1)^2 - (x+1)^3 + 6x^2(x+1) - 3x(x+1)^2\right)dx \\ &= \int_1^3 \left(6x(x+1)^2 - (x+1)^3 + 6x^2(x+1) - 3x(x+1)^2\right)dx \\ &= \int_1^3 \left(8x^3 + 9x^2 - 1\right)dx = \left(2x^4 + 3x^3 - x\right)\Big|_1^3 = 236 \end{aligned}$$

ii) Yendo primero de $(1, 2)$ a $(3, 2)$, con $y = 2, dy = 0$ y después de $(3, 2)$ a $(3, 4)$, con $x = 3, dx = 0$, resulta

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 (24x - 8)dx + \int_2^4 (54y - 9y^2)dy \\ &= \left(12x^2 - 8x\right)\Big|_1^3 + \left(27y^2 - 3y^3\right)\Big|_2^4 \\ &= 80 + 156 = 236 \end{aligned}$$

---

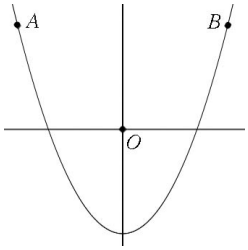
b) Aquí, en todo el plano *Oxy*,

$$P_y = x^2\cos x + 2x\,\mathrm{sen}\,x - 2ye^x = Q_x$$

de modo que el valor de la integral a lo largo de un circuito cerrado, como es el caso propuesto, vale 0.

3) Calcular el valor de

$$\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$



siendo C el arco de $y = 2x^2 - 1$ que va desde $A : (-1, 1)$ hasta $B : (1, 1)$.

Siendo aquí

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}; \qquad Q = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

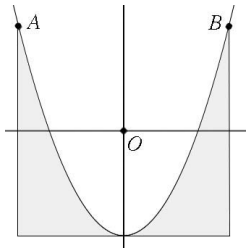
resulta

$$P_y = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = Q_x$$

salvo, por supuesto en el punto $(0, 0)$.

En consecuencia, la integral pedida vale lo mismo que la que se calcula a lo largo de una trayectoria diferente, a condición que entre ésta y la original no se encuentre dicho punto singular.

Por ejemplo:

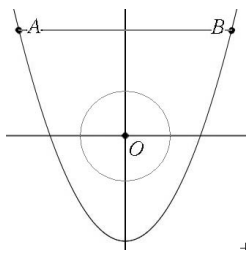


i) Escogiendo la línea quebrada compuesta por el trazo que va desde $(-1, 1)$ a $(-1, -1)$, a lo largo de lo cual $x = -1, dx = 0$ seguida por el trazo desde $(-1, -1)$ a $(1, -1)$, donde $y = -1, dy = 0$, para finalizar con el que va desde $(1, -1)$ a $(1, 1)$, en el cual $x = 1, dx = 0$, resulta

$$I = \int_1^{-1} \frac{-dy}{1 + y^2} + \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 + 1} + \int_{-1}^{1} \frac{dy}{1 + y^2}$$

$$= -\arctan y\Big|_1^{-1} + \arctan x\Big|_{-1}^{1} + \arctan y\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}$$



ii) Alternativamente, la integral a lo largo de la parábola, más la integral en línea recta desde *B* hasta *A*, debe ser igual a la integral a lo largo de una circunferencia con centro en el origen; en consecuencia, la integral pedida es igual a la suma de esta última con la integral en línea recta desde *A* hasta *B*:

$$\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \oint_{\text{circunferencia}} + \int_A^B$$

Pues bien, considerando la circunferencia

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos t \\ y &= R\operatorname{sen} t \end{aligned}\right\}, \text{ con lo cual } \left\{\begin{aligned} dx &= -R\operatorname{sen} t\, dt \\ dy &= R\cos t\, dt \end{aligned}\right.$$

resulta

$$\oint_{\text{circunferencia}} = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \cos^2 t + R^2 \operatorname{sen}^2 t}{R^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

mientras, fácilmente,

$$\int_A^B = \int_{-1}^{1} \frac{-dx}{x^2+1} = -\arctan x\Big|_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{2}$$

de modo que

$$\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
SEGUNDO SEMESTRE 2014.

MAT 1630 - CÁLCULO 3
PROBLEMA 4- I3

1. Notemos en primer lugar que la superficie Â´puede ser descrita como el conjunto de puntos de la forma
$$\{(x, y, z) : y = 1 - x^2 - z^2, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$
Es decir una parametrización de la superficie Σ es $\varphi(x, z) = (x, 1 - x^2 - z^2, z)$. De donde un vector normal inducido por dicha parametrización será
$$\varphi_x \times \varphi_z = (-2x, -1, -2z).$$
Luego para calcular el área de Σ calculamos
$$A(\Sigma) = \int_D \int \sqrt{4x^2 + 4z^2 + 1}\, dA, \qquad \text{donde} \quad D : x^2 + z^2 \leq 1.$$
Utilizamos coordenadas cilindricas para obtener $A(\Sigma) = \dfrac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1)$.

2. Para calcular la integral de superficie pedida, utlizamos como $\mathbf{n} = (-2x, -1, -2z)$ (también está correcto utilizar $-\mathbf{n}$).
Con lo cual
$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \int F \cdot \mathbf{n} dS &= \int_\Sigma \int (x, -y, 1) \cdot (-2x, -1, -2z) dS \\
&= \int_\Sigma \int (x, x^2 + z^2 - 1, 1) \cdot (-2x, -1, -2z)\, dS \\
&= \int_D \int (-3x^2 + 1 - 2z)\, dA \\
&= \frac{\pi}{4} \qquad \text{tambien es correcto el valor } -\pi/4.
\end{aligned}$$