PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MAT-1630 * CÁLCULO III. TAV-2014

INTERROGACIÓN N° 2 M.21.01.14

Solución

1. **[6 puntos]** Considere la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + xy + xz + yz + 4y + z - 3$$

Determine (si los hay) los extremos locales de f.

Solución.

Primero buscamos los puntos críticos para ello resolvemos la ecuación $\vec{\nabla} f(x, y, z) = 0$, es decir

$$(f_x, f_y, f_z) = (3x^2 + y + z, 2y + x + z + 4, x + y + 1) = (0, 0, 0)$$

por tanto se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} 3x^2 + y + z &= 0 \\ 2y + x + z + 4 &= 0 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

De donde resolviendo el sistema se obtienen los puntos críticos

$$P_1 = (-1, 0, 3) \text{ y } P_2 = (1, -2, -1)$$

Para determinar la naturaleza de los puntos críticos, determinamos la matriz Hessiana en tales puntos

$$H_3 f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 6x & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$H_3 f(-1, 0, 3) = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$|H_1| = -6, \quad |H_2| = -13 \quad \text{y} \quad |H_3| = 4$$

Como $|H_2| < 0$ por tanto, en el punto P_1 la función tiene un punto silla.

Analogamente para el segundo punto

$$H_3 f(1, -2, -1) = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde

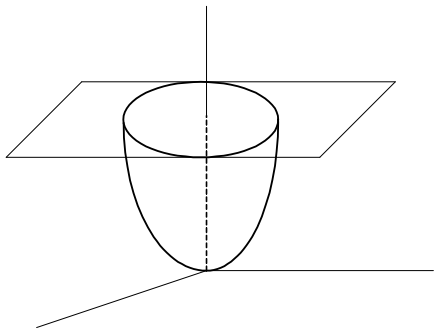
$$|H_1| = 6, \quad |H_2| = 11 \quad \text{y} \quad |H_3| = -6$$

por tanto, en el punto P_2 la función también tiene un punto silla.

2.**[6 puntos]** Considere la región A de $\mathbb{R}^3$ limitada por abajo por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y por arriba por el plano $z = 1$(incluyendo los bordes). Determine los extremos globales de $f(x, y, z) = x + y + z$ sabiendo que los puntos (x, y, z) pertenecen a la región A del espacio $\mathbb{R}^3$.

Solución.

Note que la región A tiene por gráfico



Entonces analizamos la función a extremar en:

i) Interior de A.

$$A^* = \{(x, y, z)/\ x^2 + y^2 < z < 1\}.$$

Buscamos puntos en A^* tales que $\vec{\nabla} f = \vec{0}$, pero $\vec{\nabla} f = (1, 1, 1)$, luego no hay puntos críticos en el interior de A.

ii) En la intersección del plano y el paraboloide.

Es decir en el conjunto $\{(x, y, z)/\ z = 1\ \wedge\ x^2 + y^2 = z\}$,

$$f(x, y, z) = x + y + 1 \quad \text{sujeta a} \quad x^2 + y^2 = 1$$

o bien $L(x, y, \lambda) = x + y + 1\ - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$L_x = 1 - 2\lambda x = 0$$
$$L_y = 1 - 2\lambda y = 0$$
$$L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

resolviendo se obtienen los puntos críticos

$$P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) \text{ y } P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

iii) En el interior del plano.

Osea en $\{(x,y,z)/z=1 \ \wedge \ x^2+y^2<1\}$ la función

$f(x,y,z)=x+y+1$ no tiene puntos críticos.

iv) En el manto del paraboloide, pero bajo el plano.

Es decir en $\{(x,y,z)/z<1 \ \wedge \ z=x^2+y^2\}$.

$$L(x,y,z,\lambda)=x+y+z-\lambda(z-x^2-y^2)$$

haciendo $\vec{\nabla} f=\vec{0}$ y considerando $z<1$, resulta el punto crítico

$$P_3\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \text{ para } \lambda=1.$$

Finalmente evaluando f en los puntos críticos encontrados

$$f(P_1)=\sqrt{2}+1, \ f(P_2)=-\sqrt{2}+1, \text{ y } \ f(P_3)=-\frac{1}{2}.$$

Por tanto f alcanza su máximo global en P_1 y en P_3 su mínimo global.

3. a) Dadas las funciones

$\vec{G}(x,y) = (xy,\, e^{-x}y,\, x^2+y^2)$ y $\vec{F}(u,v,w) = (u\cos(\pi v),\, v\,\text{sen}(\pi w),\, uvw)$

y sea la función $\vec{H} = \vec{F}\circ\vec{G}$.

a_1) **[1.5 puntos]** Determine $d\vec{H}$.

a_2) **[1.5 puntos]** Encuentre la derivada direccional de $\vec{H}$ en el punto $(0,1)$ y en la dirección del vector $(3,4)$.

b) **[3 puntos]** Calcule $\int\int_R (x^2+2y)\,dydx$ donde R es la región limitada por las curvas $y = x^2$, $x = y^2$.

Solución.

a)

a_1) Es claro que

$$d\vec{H} = \vec{H}'(\vec{x})\,d\vec{x} \text{ con } \vec{H}'(\vec{x}) = \vec{F}'\Big(\vec{G}(\vec{x})\Big)\vec{G}'(\vec{x}),\ \vec{x} = (x,y),\ d\vec{x} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

$$\vec{G}'(\vec{x}) = \begin{bmatrix} y & x \\ -ye^{-x} & e^{-x} \\ 2x & 2y \end{bmatrix};\ \vec{F}'(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \cos\pi v & -\pi\,\text{sen}\,\pi v & 0 \\ 0 & \text{sen}\,\pi w & \pi\cos\pi w \\ vw & uw & uv \end{bmatrix}$$

donde $\vec{G}(\vec{x}) = (xy,\, e^{-x}y,\, x^2+y^2)$ y $\vec{r} = (u,v,w) \Rightarrow u = xy,\ v = ye^{-x}$ y $w = x^2+y^2$, por tanto

$$d\vec{H} = \vec{F'}\vec{G}'\,d\vec{x} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \lambda & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = (\alpha dx+\beta dy,\, \gamma dx+\delta dy,\, \lambda dx+\mu dy)$$

con: $\alpha = y\cos(\pi ye^{-x}) + xy\,\text{sen}(\pi e^{-x}y)e^{-x}$

$\beta = x\cos(\pi ye^{-x}) - \pi\,\text{sen}(\pi e^{-x}y)$

$\gamma = -ye^{-x}\,\text{sen}(\pi(x^2+y^2)) + 2\pi xye^{-x}\cos(\pi(x^2+y^2))$

$\delta = e^{-x}\,\text{sen}(\pi(x^2+y^2)) + 2\pi y^2e^{-x}\cos(\pi(x^2+y^2))$

$\lambda = y^2e^{-x}(x^2+y^2) - y^2x(x^2+y^2)e^{-x} + 2x^2y^2e^{-x}$

$\mu = xye^{-x}(x^2+y^2) + xy(x^2+y^2)e^{-x} + 2xy^3e^{-x}$.

a_2) De inmediato la derivada direccional pedida eestá dada por

$$D_{\widehat{v}}\vec{H}(\vec{x}_0) = \vec{H}'(\vec{x}_0)\,\widehat{v},\ \text{con}\ \vec{x}_0 = (0,1),\ \widehat{v} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

y para obtener $\vec{H}'(0,1)$ aprovechamos a_1, con lo que resulta

$$\vec{H}'(0,1) = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

por tanto

$$D_{\widehat{v}}\vec{H}(\vec{x}_0) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3\\-8\\3\end{bmatrix}$$

b) Los puntos de intersección de las curvas son $P_1(0,0)$ y $P_2(1,1)$. La curva superior en términos de x es $y = \sqrt{x}$ y la curva inferior $y = x^2$, por tanto la región R en cuestión queda definida por

$$R = \{(x,y)/\ 0 \le x \le 1\ \wedge\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\,\}$$

Por tanto

$$\int\int_R \big(x^2+2y\big)dydx\ = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \big(x^2+2y\big)\,dy\,dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \big(x^2y + y^2\big)\ \Big|_{\sqrt{x}}^{x^2} dx\\
&= \int_0^1 (x^{5/2} - 2x^4 + x)\,dx\\
&= \frac{2}{7}\,x^{7/2} - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2\ \Big|_0^1\\
&= \frac{27}{70}.
\end{aligned}$$

4. **[6 puntos]** Dada la función $(x, y) = \vec{F}(u, v) = \dfrac{1}{34}(5\sqrt{9v+u}, 3\sqrt{25v-u})$ definida en la región $\mathfrak{R} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \leq u \leq 9,\ 1 \leq v \leq 4\}$, se pide encontrar el gráfico de la región imagen $\mathfrak{D}$ contenida en el primer cuadrante del plano (X, O, Y), la matriz jacobiana de $\vec{F}(u, v)$ y el jacobiano asociado a la matriz.

Solución.

Considerando la función $(x, y) = \vec{F}(u, v) = \dfrac{1}{34}(5\sqrt{9v+u}, 3\sqrt{25v-u})$ se concluye que:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{5}{34}\sqrt{9v+u} = x \\ \dfrac{3}{34}\sqrt{25v-u} = y \end{array}\right\}$$

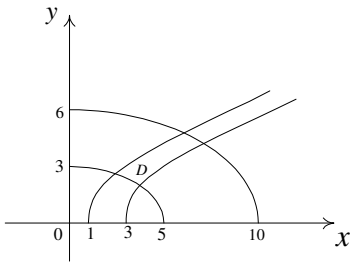
resolviendo este sistema para (u, v) se obtiene

$$u = x^2 - y^2,\ v = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9},$$

y como $\mathfrak{R} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \leq u \leq 9,\ 1 \leq v \leq 4\}$, se deduce que la imagen $\mathfrak{D}$ está definida por:

$$1 \leq x^2 - y^2 \leq 9,\ \ 1 \leq \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \leq 4$$

cuyo gráfico es



Por otra parte, la matriz jacobiana pedida es

$$\vec{F}\,'(u, v) = \tfrac{1}{2\sqrt{34}} \begin{bmatrix} \dfrac{5}{\sqrt{9u+v}} & \dfrac{45}{\sqrt{9u+v}} \\ \dfrac{-3}{\sqrt{25v-u}} & \dfrac{75}{\sqrt{25v-u}} \end{bmatrix}$$

de donde el jacobiano correspondiente es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{15}{4\sqrt{225v^2+16uv-u^2}}$$