Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2025

Cálculo 3 ⋆ MAT1630

Interrogación 1

1. (a) **(8 ptos)** Calcule la integral triple usando coordenadas esféricas:

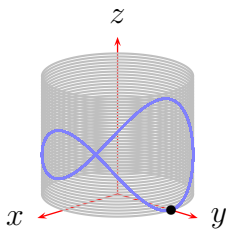
$$\iiint_E (x^2+y^2+z^2)^{3/2}\,dV$$

donde E es la esfera unitaria $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

(b) **(8 ptos)** Sea C la curva que se obtiene al intersectar las superficies

$$z-1 = x^2-y^2, \quad x^2+y^2=1$$

Determine una ecuación para la recta tangente a C en el punto $(0,1,0)$.



2. (a) **(8 ptos)** Sea $c \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria y considere la curva paramétrica dada por:

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3 - ct), \quad t \in \mathbb{R}$$

Determine todos los punto sobre el eje-x donde la curva se intersecta a sí misma y luego determine el o los valores de c para los cuales las rectas tangentes en ese punto son perpendiculares.

(b) **(8 ptos)** Considere la curva Γ dada en forma paramétrica:

$$\vec{r}(t) = (e^t\cos(t), e^t\sin(t), e^t)$$

Determine la curvatura de la curva Γ, para todo número real t.

3. **(15 ptos)** Considere las curvas polares

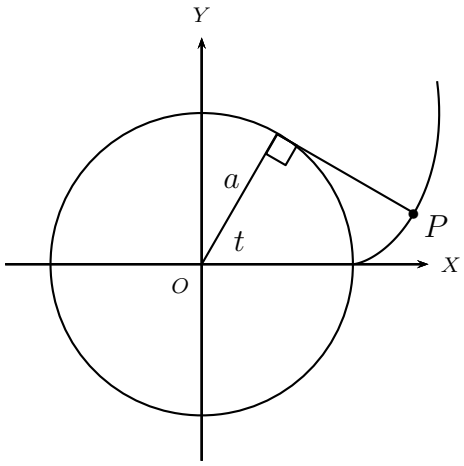
$r = 1+\cos(\theta)$	cardioide
$r = 1$	circunferencia

(a) En un mismo gráfico, esboce las gráficas de esta curvas polares.

(b) Calcule la longitud de la parte de cardioide que se encuentra al interior de la circunferencia.

Continua...

4. **(15 ptos)** Se enrolla una cuerda alrededor de un círculo y luego se desenrolla mientras se mantiene tensa (ver la figura). El círculo tiene radio a y centro O, y la posición inicial de P es $(a, 0)$. Determine las coordenadas del punto P como función del ángulo t de la figura.



Sugerencia: Las coordenadas del punto P se puede obtener como suma de vectores.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular y/o relojes inteligente prendidos

Pauta de Corrección

1. (a) Recordemos que en coordenadas esféricas tenemos:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\phi \cos\theta \\ y &= \rho \sin\phi \sin\theta \\ z &= \rho \cos\phi \end{aligned}$$

donde $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$, y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, la integral se convierte en:

$$\begin{aligned} \iiint_E (x^2+y^2+z^2)^{3/2}\, dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 \rho^3 \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 \rho^5 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \end{aligned}$$

Calculamos cada integral por separado:

Integral en ρ:

$$\int_0^1 \rho^5 \, d\rho = \left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Integral en ϕ:

$$\int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi = [-\cos\phi]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2$$

Integral en θ:

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

Por lo tanto:

$$\iiint_E (x^2+y^2+z^2)^{3/2}\, dV = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3}$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1 pto**	**Determinar** en la integral que $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ cuando se hace el cambio de variable en esférica.
C2	**1 pto**	**Determinar** los índices de integración en la integral para ρ.
C3	**1 pto**	**Determinar** los índices de integración en la integral para θ.
C4	**1 pto**	**Determinar** los índices de integración en la integral para ϕ.
C5	**1 pto**	**Calcular** $\int_0^1 \rho^5 \, d\rho = \frac{1}{6}$.
C6	**1 pto**	**Calcular** $\int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi = 2$.
C7	**1 pto**	**Calcular** $\int_0^{2\pi} d\theta = 3\pi$.
C8	**1 pto**	

(b) Para encontrar la recta tangente, necesitamos parametrizar la curva C. De $x^2 + y^2 = 1$, podemos usar:

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t$$

Al remplazar $x(t)$ e $y(t)$ en la superficie $z = 1 + x^2 - y^2$ tendremos $z(t)$, vale decir

$$z = 1 + x^2 - y^2 = 1 + \cos^2 t - \sin^2 t = 1 + \cos(2t)$$

Por lo tanto, la parametrización de C es:

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1 + \cos(2t))$$

Para encontrar el valor de t correspondiente al punto $(0, 1, 0)$: $\cos t = 0$ y $\sin t = 1$ implica $t = \frac{\pi}{2}$.
El vector tangente es:

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, -2\sin(2t))$$

En $t = \frac{\pi}{2}$:

$$\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\sin\frac{\pi}{2}, \cos\frac{\pi}{2}, -2\sin(\pi)\right) = (-1, 0, 0)$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $(0, 1, 0)$ con vector director $(-1, 0, 0)$ es:

$$\mathbf{L}(t) = (0, 1, 0) + t(-1, 0, 0) = (-t, 1, 0)$$

O en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**2 pto**	**Identificar** la parametrización $x(t) = \cos(t)$ e $y(t) = \sin(t)$
C2	**2 pto**	**Determinar** que $z = 1+\cos^2(t)-\sin^2(t)$, o una expresión equivalente, luego de evaluar $x(t) = \cos(t)$ e $y(t) = \sin(t)$ en la ecuación $z = 1 + x^2 - y^2$.
C3	**2 pto**	**Determinar** $\mathbf{r}'(\pi/2) = (-1, 0, 0)$.
C4	**2 pto**	**Determinar** una ecuación paramétrica de la recta, por ejemplo $(x, y, z) = (0, 1, 0) + t(-1, 0, 0)$. Si el estudiante determinó correctamente **r** pero equivoca en determinar su derivada ó equivoca en determinar $\mathbf{r}'(\pi/2)$ sin cometer ningún otro error, asignar (**1 pto**) por obtener $(x, y, z) = (0, 1, 0) + t\mathbf{r}'(\pi/2)$, para el $\mathbf{r}'(\pi/2)$ que haya determinado

2. (a) Forma I. Para que un punto esté en el eje-x, debe tener $y = 0$:

$$t^3 - ct = 0$$

$$t(t^2 - c) = 0$$

Las soluciones son $t = 0$ y $t = \pm\sqrt{c}$, donde $c > 0$ para que la raíz esté bien definida y la curva se intersecte a si misma. Para estos valores de t los puntos asociados sobre el eje-x son:

$$\mathbf{r}(0) = (0, 0), \quad \mathbf{r}(-\sqrt{c}) = (c, 0), \quad \mathbf{r}(\sqrt{c}) = (c, 0), \quad c > 0$$

De este modo, el punto de autointersección es $(c, 0)$ para $t = \pm\sqrt{c}$.

Ahora calculamos los vectores tangentes:

$$\mathbf{r}'(t) = (2t, 3t^2 - c) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}'(-\sqrt{c}) \cdot \mathbf{r}'(\sqrt{c}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4c^2 - 4c = 0$$

donde la ecuación $4c^2 - 4c = 0$ tiene por solución $c = 1$, ya que $c > 0$.

Forma II. Para que un punto esté en el eje-x, debe tener $y = 0$:

$$t^3 - ct = 0$$

$$t(t^2 - c) = 0$$

Las soluciones son $t = 0$ y $t = \pm\sqrt{c}$, donde $c > 0$ para que la raíz esté bien definida y la curva se intersecte a si misma. Para estos valores de t los puntos asociados sobre el eje-x son:

$$\mathbf{r}(0) = (0, 0), \quad \mathbf{r}(-\sqrt{c}) = (c, 0), \quad \mathbf{r}(\sqrt{c}) = (c, 0), \quad c > 0$$

De este modo, el punto de autointersección es $(c, 0)$ para $t = \pm\sqrt{c}$.

Ahora determinamos las pendientes de las rectas tangentes:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3t^2 - c}{2t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{r}'(-\sqrt{c}) & \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2c}{-2\sqrt{c}} = -\sqrt{c} \\ \mathbf{r}'(\sqrt{c}) & \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2c}{2\sqrt{c}} = \sqrt{c} \end{cases}$$

Luego, para que las rectas sean perpendiculares se debe cumplir que el producto de las pendientes sea -1, es decir

$$-\sqrt{c} \cdot \sqrt{c} = -1 \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1 pto**	**Determinar** que la curva intersecta al eje x para $t = 0$.
C2	**2 pto**	**Determinar** que la curva intersecta al eje x para $t = \pm\sqrt{c}$.
C3	**1 pto**	**Demostrar** que $\mathbf{r}(\pm\sqrt{c}) = (c, 0)$.
C4	**1 pto**	**Calcular** $\mathbf{r}'(t) = (2t, 3t^2 - c)$. **ó** **Calcular** $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$
C5	**1 pto**	**Determinar** la ecuación $4c^2 - 4c = 0$, o equivalente, a partir del producto punto $\mathbf{r}'(-\sqrt{c}) \cdot \mathbf{r}'(-\sqrt{c}) = 0$. **ó** **Determinar** la ecuación $-\sqrt{c} \cdot \sqrt{c} = 0$, o equivalente, a partir del producto de las pendientes es -1.
C6	**2 pto**	

(b) La curvatura se calcula usando:

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

Calculamos el tangente y tangente unitario:

$$\mathbf{r}'(t) = e^t(\cos(t) - \sin(t), \sin(t) + \cos(t), 1) \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{3}e^t$$

De este modo,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos(t) - \sin(t), \sin(t) + \cos(t), 1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sin(t) - \cos(t), \cos(t) - \sin(t), 0)$$

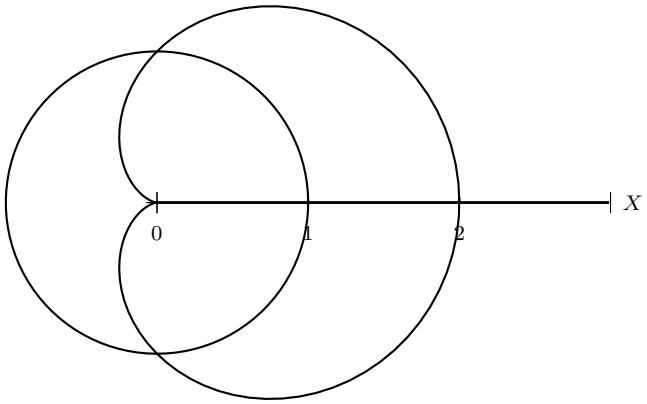
$$\Rightarrow \quad \|\mathbf{T}'(t)\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Por lo tanto,

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\sqrt{2}e^{-t}}{3}$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1.5 pto**	**Calcular** $\mathbf{r}'(t)$.
C2	**1.5 pto**	**Calcular** $\|\mathbf{r}'(t)\|$.
C3	**1.5 pto**	**Calcular** $\mathbf{T}(t)$. **ó** **Calcular** $\mathbf{r}''(t)$.
C4	**1.5 pto**	**Calcular** $\mathbf{T}'(t)$. **ó** **Calcular** $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$.
C5	**1 pto**	**Calcular** $\|\mathbf{T}'(t)\|$. **ó** **Calcular** $\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|$.
C6	**1 pto**	**Determinar** el valor de la curvatura, para todo t.

3. (a) La ecuación $r = 1 + \sin(\theta)$ representa un cardioide.



Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1 pto**	**Esbozar** la gráfica de la circunferencia de radio 1.
C2	**1 pto**	**Esbozar** la gráfica del cardioide.
C3	**1 pto**	**Esbozar** la gráfica del cardioide, pasando por el eje polar en $r = 0$ y $r = 2$.
C4	**1 pto**	**Esbozar** ambas curvas polares en un mismo gráfico, donde la cardioide intersecta a la circunferencia en dos puntos, simétricos respecto

(b) La longitud de arco en coordenadas polares es:

$$\begin{aligned}
L &= 2\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\
&= 2\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{(1+\cos(\theta))^2 + (-\sin(\theta))^2}\, d\theta \\
&= 2\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{2+2\cos(\theta)}\, d\theta \\
&= 2\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{4\cos^2(\theta/2)}\, d\theta \\
&= 4\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(\theta/2)\, d\theta \\
&= 8\sin(\theta/2)\Big|_{\pi/2}^{\pi} \\
&= 8\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1 pto**	**Identificar** que las curvas polares se intersectan en las soluciones de la ecuación $1+\cos(\theta)=1$.
C2	**2 pto**	**Determinar** las soluciones de la ecuación $1+\cos(\theta)=1$, es decir $\theta=\pi/2$ y $\theta=3\pi/2$.
C3	**2 pto**	**Determinar** que la longitud pedida es $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$ o $2\int_{\pi/2}^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$, habiendo o no reemplazado $r(\theta)=1+\cos(\theta)$.
C4	**2 pto**	**Identificar** que $1+\cos(\theta)=\cos^2(\theta/2)$.
C5	**2 pto**	**Calcular** $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos(\theta/2)\,d\theta$ o $\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(\theta/2)\,d\theta$
C5	**2 pto**	**Determinar** la longitud de la curva.

4. Cuando se desenrolla la cuerda, el punto P se mueve siguiendo la involuta del círculo.

Analizamos la geometría: El punto de contacto de la cuerda con el círculo está en $(a\cos t, a\sin t)$ La longitud de cuerda desenrollada es at La cuerda es tangente al círculo en el punto de contacto La dirección de la cuerda (perpendicular al radio) es $(-\sin t, \cos t)$

Por la sugerencia, las coordenadas de P son:

$$\mathbf{P}(t) = \text{vector radio} + \text{ponderado de su perpendicular}$$

El vector radio al punto de contacto es $(a\cos t, a\sin t)$. Su perpendicular unitario (en dirección de desenrollado) es $(-\sin t, \cos t)$. La longitud desenrollada es at.

Por lo tanto:

$$\mathbf{P}(t) = (a\cos t, a\sin t) + at(\sin t, -\cos t)$$

$$\mathbf{P}(t) = (a\cos t + at\sin t, a\sin t - at\cos t)$$

$$\boxed{\mathbf{P}(t) = a(\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t)}$$

Esta es la parametrización de la involuta de un círculo de radio a.

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**3 pto**	**Determinar** una parametrización para la circunferencia unitaria, por ejemplo $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$.
C2	**4 pto**	**Calcular** $\mathbf{T}(t) = (\cos(t), \sin(t))$.
C3	**4 pto**	**Identificar** que la cantidad de cuerda que se ha desenrollado es de rt.
C4	**4 pto**	**Determinar** las coordenadas de $P(t) = \mathbf{r}(t) - rt\mathbf{T}(t)$.