PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Primer Semestre de 2012

MAT1630 - Cálculo III
Interrogación 3 - Solución

1. *a*) Sea F un campo diferenciable en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ (no necesariamente definido en 0). Considere
$S^+ = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$, $S^- = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \leq 0\}$ y $\hat{r} = \frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}$.
Demuestre que

$$\int_{S^+} \nabla \times F \cdot dS = -\int_{S^-} \nabla \times F \cdot dS,$$

donde ambas integrales están orientadas de acuerdo a la dirección paralela a $\hat{r}$.

Solución . Observamos que $\partial^+ S^+ = \partial^- S^- = \{(x,y,0) :\ x^2+y^2 = 1\}$, donde ∂^+ indica la frontera orientada consistentemente con $\hat{r}$, mientras ∂^- indica la frontera orientada en la dirección contraria.
El teorema de Stokes implica que

$$\int_{S^+} \nabla \times F \cdot dS = \int_{\partial^+ S^+} F \cdot ds \text{ y}$$

$$\int_{S^-} \nabla \times F \cdot dS = \int_{\partial^+ S^-} F \cdot ds.$$

Como $\int_{\partial^+ S^-} F \cdot ds = -\int_{\partial^- S^-} F \cdot ds$ obtenemos el resultado.

□

b) Sea $F(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^3}$. Demuestre que no existe un campo G tal que $F = \nabla \times G$.

Solución . Parametrizando en coordenadas esféricas tenemos que

$$\int_{S^+} F \cdot dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\theta \, d\phi = 2\pi.$$

Mientras que

$$\int_{S^-} F \cdot dS = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\theta \, d\phi = 2\pi.$$

Por lo tanto,

$$\int_{S^+} F \cdot dS \neq -\int_{S^-} F \cdot dS,$$

lo cual contradice la parte anterior si $F = \nabla \times G$.

□

2. Considere la superficie $\mathcal{S}$ dada por $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}$, con $y \geq 1$.

   a) Demuestre que el volumen contenido por $\mathcal{S}$ es finito.

   Solución . El volumen contenido por $\mathcal{S}$ puede parametrizarse en coordenadas cilíndricas como

$$\{(r\cos\theta, y, r\,\mathrm{sen}\,\theta) : r \in (0,1],\ \theta \in [0, 2\pi), y \in [1, \frac{1}{r})\}.$$

   El elemento de volumen esta dado por r y el volumen se calcula como

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_1^{\frac{1}{r}} r dz dr d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r) dr d\theta \\ &= 2\pi - \pi \\ &= \pi < \infty\end{aligned}$$

   □

   b) Demuestre que el área de $\mathcal{S}$ no es finita.

   Solución . La superficie puede parametrizarse como $(r\cos\theta, \frac{1}{r}, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ con $r \in (0,1]$ y $\theta \in [0, 2\pi)$.
   El elemento de área está dado por

$$\begin{aligned}\|(\cos\theta, -\frac{1}{r^2}, \mathrm{sen}\,\theta) \times (-r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0, r\cos\theta)\| &= \|(-\frac{1}{r}\cos\theta, -r, -\frac{1}{r}\,\mathrm{sen}\,\theta)\| \\ &= \sqrt{r^2 + \frac{1}{r^2}}.\end{aligned}$$

   Por lo tanto, el área esta acotada por

$$\mathrm{Area}(\mathcal{S}) > \int_0^{2\pi}\int_\epsilon^1 \sqrt{r^2 + \frac{1}{r^2}} dr d\theta \geq \int_0^{2\pi}\int_\epsilon^1 \frac{1}{r} dr d\theta = -2\pi \ln\epsilon.$$

   Tomando $\epsilon \to 0$, tenemos que $\mathrm{Area}(\mathcal{S})$ no es finita. □

3. Sea $F(x,y,z) = \left(\frac{-z}{x^2+z^2}, 0, \frac{x}{x^2+z^2}\right)$.

a) Demuestre que F es conservativo en $\{(x,y,z) : x > 0\}$ y encuentre un potencial para F.

Solución . Sea $S = \{(x,y,z) : x > 0\}$. Sobre S tenemos que

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x}{x^2+z^2}\right] \ , \ \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{-z}{x^2+z^2}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{x^2+z^2}\right] \ , \ -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{-z}{x^2+z^2}\right] \right) = (0,0,0),$$

por lo tanto, dado que F no tiene singularidades en S y que S es simplemente conexo, concluimos que F es conservativo. Para calcular su potencial, fijemos un punto cualquiera en el domino $(1,0,0)$ y consideremos la curva $\gamma(t) = \begin{cases} t(1,y,0) + (1-t)(1,0,0) & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ (t-1)(x,y,0) + (2-t)(1,y,0) & \text{si } 1 \le t \le 2 \\ (t-2)(x,y,z) + (3-t)(x,y,0) & \text{si } 2 \le t \le 3 \end{cases}$. La integral de línea F sobre γ nos da una función potencial

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = \int_0^1 0 \, dt + \int_1^2 -\frac{z}{((t-1)(x-1)+1)^2+z^2}(x-1)dt + \int_3^4 \frac{x}{(x^2+(t-2)^2z^2}z \, dt \\ = 0 + \arctan\left(\frac{(t-2)z}{x}\right)\Big|_{t=2}^{3} = \arctan\left(\frac{z}{x}\right) \end{aligned}$$

Otra posibilidad para calcular el potencial es estudiar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-z}{x^2+z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{x}{x^2+z^2} \end{aligned}$$

De la tercera ecuación tenemos que $f(x,y,z) = \arctan\left(\frac{z}{x}\right) + c(x,y)$. Usando la segunda igualdad concluimos que $\frac{\partial c(x,y)}{\partial y} = 0$, por lo tanto $c(x,y) = \tilde{c}(x)$. Finalmente, utilizando la primera ecuación obtenemos $\frac{\partial \tilde{c}(x)}{\partial x} = 0$, con lo cual concluimos que $f(x,y,z) = \arctan(\frac{z}{x})$ es un potencial para F.
Obs: Por inspección podemos ver que $\arctan(\frac{z}{x})$ *es un potencial* □

b) Sea C la curva que se obtiene al intersectar el plano $x + y = 0$ con el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$. Calcule

$$\int_C F \cdot ds.$$

¿Es F conservativo en $\mathbb{R}^3$?

Solución . En la intersección se satisface $2x^2 + 2z^2 = 2$, por lo tanto parametrizamos la curva como $(\cos\theta, -\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. La integral de línea esta dada por

$$\int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}\theta \cdot -\operatorname{sen}\theta + \cos\theta \cdot \cos\theta \, d\theta = 2\pi.$$

Concluimos que F no es conservativo en $\mathbb{R}^3$, pues si lo fuera, las integrales sobre curvas cerradas serían 0. □

4. Considere el campo vectorial $F(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^3} + \frac{(x-1,y-1,z-1)}{\|(x-1,y-1,z-1)\|^3}$.

   a) Calcule el flujo de F a través de $\{(x,y,z) : \ x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{4}\}$.

   b) Calcule el flujo de F a través de cualquier superficie cerrada orientable en $\mathbb{R}^3$ que no contiene a los puntos $(0,0,0)$ ni $(1,1,1)$.

Solución. *a*) Ver la parte b). El resultado es 2π.

b) Primero observemos que

$$\int_{\mathcal{S}} F \cdot dS = \int_{\mathcal{S}} F_1 \cdot dS + \int_{\mathcal{S}} F_2 \cdot dS,$$

donde $F_1(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^3}$ y $F_2(x,y,z) = \frac{(x-1,y-1,z-1)}{\|(x-1,y-1,z-1)\|^3}$.
Para $i = 1,2$ definimos

$$I_i(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} F_i \cdot dS.$$

Observemos que para todo $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ se tiene que

$$\text{div } F_1 = 0$$

y para $(x,y,z) \neq (1,1,1)$ se tiene que

$$\text{div } F_2 = 0$$

Calculemos primero $I_1(\mathcal{S})$:

- Si $\mathcal{S}$ no encierra el 0, por teorema de la divergencia tenemos

$$I_1(\mathcal{S}) = 0.$$

- Si $\mathcal{S}$ encierra el 0 tomemos la región delimitada por $\mathcal{S}$ y $\partial B_\epsilon(0)$, donde $B_\epsilon(0)$ es una bola contenida en la región delimitada por $\mathcal{S}$. Por teorema de la divergencia

$$I_1(\mathcal{S}) + \int_{\partial^- B_\epsilon(0)} F_1 \cdot dS = 0.$$

  Parametrizando $\partial^+ B_\epsilon(0)$ en coordenadas esféricas tenemos que

$$\int_{\partial^- B_\epsilon(0)} F_1 \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi \, d\theta = 4\pi.$$

  Por lo tanto

$$I_1(\mathcal{S}) = 4\pi.$$

Observemos que $F_2(x,y,z) = F_1(x-1,y-1,z-1)$, por lo tanto el análisis anterior nos da que

- Si $\mathcal{S}$ no encierra el $(1,1,1)$ tenemos que

$$I_2(\mathcal{S}) = 0.$$

- Si $\mathcal{S}$ encierra el $(1,1,1)$ tenemos que

$$I_2(\mathcal{S}) = 4\pi.$$

Concluimos que:

- Si $\mathcal{S}$ no contiene $(0,0,0)$ ni $(1,1,1)$

$$\int_{\mathcal{S}} F \cdot dS = 0.$$

- Si $\mathcal{S}$ no contiene $(0,0,0)$ pero contiene a $(1,1,1)$ o $\mathcal{S}$ contiene $(0,0,0)$ pero no contiene a $(1,1,1)$

$$\int_{\mathcal{S}} F \cdot dS = 4\pi.$$

- Si $\mathcal{S}$ contiene a $(0,0,0)$ y a $(1,1,1)$

$$\int_{\mathcal{S}} F \cdot dS = 8\pi.$$

□