FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Interrogación 1
MAT1630 - Cálculo III

Instrucciones:

- Cada problema vale 60 puntos. La distribución se indica en cada parte.
- Justifica cada paso. Simplifica algebraicamente siempre que sea posible.
- **En caso de ser sorprendido con un celular, tablet u otro dispositivo electrónico durante la prueba, esta será evaluada con nota mínima.**
- Duración: 120 minutos.

---

1. Sea la curva paramétrica en el plano definida por

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2 - 1,\ t^3 - t \rangle, \quad t \in \mathbb{R}.$$

   a) **(20 pts)** Demuestra que la curva se intersecta a sí misma en un punto P. Halla P y los dos valores de t que lo generan.

   b) **(20 pts)** Escribe una ecuación (cartesiana o paramétrica) para la recta tangente en el punto $(3, 6)$.

   c) **(20 pts)** Encuentra todos los valores de t en los que la recta tangente es horizontal o vertical. Indica las coordenadas cartesianas correspondientes.

   Solución:

   a) Punto de autointersección (20 pts).
   La curva se intersecta cuando existen $t_1 \neq t_2$ con $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$. De la primera componente: $t_1^2 - 1 = t_2^2 - 1 \Rightarrow t_1^2 = t_2^2 \Rightarrow t_2 = -t_1$. Sustituyendo en la segunda componente:

$$t_1^3 - t_1 = -t_1^3 + t_1 \implies 2t_1^3 - 2t_1 = 0 \implies 2t_1(t_1^2 - 1) = 0.$$

   Las soluciones son $t_1 \in \{0, 1, -1\}$. Para $t_1 = 0$ se tiene $t_2 = 0$ (no válido). Para $t_1 = 1$, $t_2 = -1$: $\mathbf{r}(1) = (0, 0)$ y $\mathbf{r}(-1) = (0, 0)$. ✓
   El punto es $P = (0, 0)$, alcanzado en $t = 1$ y $t = -1$.
   Puntaje: plantear sistema (5 pts), encontrar $t_2 = -t_1$ (5 pts), resolver ec. cúbica (5 pts), identificar P (5 pts).

b) Recta tangentes en $(3, 6)$ (20 pts).
El punto se obtiene en $t = 2$. $\mathbf{r}'(t) = \langle 2t,\ 3t^2 - 1\rangle$. $\mathbf{r}'(2) = \langle 4, 11\rangle$, pendiente $m = \frac{11}{4}$. La fórmula para la ecuación de la recta dada la pendiente y un punto nos da:

$$y - 6 = \frac{11}{4}(x - 3)$$

Recta tangente: $y = \frac{11}{4}x - \frac{9}{4}$.
Alternativa para recta tangente: La parametrización de la recta es:

$$x = 4t + 3, \quad y = 11t + 6.$$

Puntaje: derivar $\mathbf{r}$ (5 pts), encontrar $t = 2$ (5 pts), ecuación o parametrización recta tangente (10 pts). No es necesario que sea la forma principal de la ecuación.

c) Tangentes horizontales y verticales (20 pts).

- **Horizontal** ($y' = 0$): $3t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = \pm 1/\sqrt{3}$. Puntos: $\mathbf{r}(\pm 1/\sqrt{3}) = \big(-2/3,\ \mp 2\sqrt{3}/9\big)$.
- **Vertical** ($x' = 0$): $2t = 0 \Rightarrow t = 0$. Punto: $\mathbf{r}(0) = (-1, 0)$.

Puntaje: condición horizontal y valores de t (7 pts), puntos (3 pts), condición vertical y punto (10 pts).

2. Considera la curva en el espacio

$$\mathbf{r}(t) = \big\langle e^t \cos t,\ e^t \operatorname{sen} t,\ e^t \big\rangle, \quad 0 \le t \le \pi.$$

(a) **(15 pts)** Calcula $\mathbf{r}'(t)$ y simplifica $|\mathbf{r}'(t)|$.

(b) **(15 pts)** Calcula la longitud de arco desde $t = 0$ hasta $t = \pi$.

(c) **(30 pts)** Encuentra la reparametrización $\widetilde{\mathbf{r}}(s)$ de la curva por longitud de arco, comenzando en $t = 0$. Indica el dominio de s.

Solución:

a) $|\mathbf{r}'(t)|$ (15 pts).

$$\mathbf{r}'(t) = e^t\langle \cos t - \operatorname{sen} t,\ \operatorname{sen} t + \cos t,\ 1\rangle.$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'(t)|^2 &= e^{2t}\big[(\cos t - \operatorname{sen} t)^2 + (\operatorname{sen} t + \cos t)^2 + 1\big] \\ &= e^{2t}[(1 - 2\operatorname{sen} t \cos t) + (1 + 2\operatorname{sen} t \cos t) + 1] = 3e^{2t}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{3}\, e^t$.
Puntaje: derivar $\mathbf{r}$ (5 pts), expandir módulo (5 pts), simplificar (5 pts).

b) Longitud de arco (15 pts).

$$L = \int_0^\pi \sqrt{3}\, e^t\, dt = \sqrt{3}\,\big[e^t\big]_0^\pi = \sqrt{3}\,(e^\pi - 1).$$

Puntaje: plantear integral (5 pts), integrar (5 pts), respuesta (5 pts).

c) Reparametrización por longitud de arco (30 pts).
La función longitud de arco acumulada es

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{3}\, e^u \, du = \sqrt{3}(e^t - 1).$$

Despejando t:

$$e^t = 1 + \frac{s}{\sqrt{3}} \implies t(s) = \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right).$$

La reparametrización es

$$\widetilde{\mathbf{r}}(s) = \left\langle \left(1 + \tfrac{s}{\sqrt{3}}\right) \cos\left[\ln\left(1 + \tfrac{s}{\sqrt{3}}\right)\right],\ \left(1 + \tfrac{s}{\sqrt{3}}\right) \operatorname{sen}\left[\ln\left(1 + \tfrac{s}{\sqrt{3}}\right)\right],\ 1 + \tfrac{s}{\sqrt{3}} \right\rangle,$$

con dominio $s \in [0,\ \sqrt{3}(e^\pi - 1)]$.
Puntaje: calcular $s(t)$ (10 pts), invertir para hallar $t(s)$ (10 pts), escribir $\widetilde{\mathbf{r}}(s)$ con dominio (10 pts).

3. Sea la curva en el espacio

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle t,\ \frac{t^2}{2},\ \frac{t^3}{6} \right\rangle, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) **(15 pts)** Calcula $|\mathbf{r}'(t)|$ y simplifica. Halla $\mathbf{T}(t)$.

b) **(20 pts)** Calcula la curvatura $\kappa(t)$ y la torsión $\tau(t)$.
Indicación: puedes usar $\kappa = |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|/|\mathbf{r}'|^3$ y $\tau = (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''/|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2$.

c) **(15 pts)** Halla $\mathbf{B}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.

d) **(10 pts)** Escribe la ecuación del *plano osculador* en $t = 1$.

Solución:

a) $|\mathbf{r}'(t)|$ y $\mathbf{T}(t)$ (15 pts).
$\mathbf{r}'(t) = \langle 1,\ t,\ t^2/2 \rangle$.

$$|\mathbf{r}'(t)|^2 = 1 + t^2 + \frac{t^4}{4} = \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^2, \quad |\mathbf{r}'(t)| = 1 + \frac{t^2}{2}.$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\langle 1,\ t,\ t^2/2 \rangle}{1 + t^2/2}.$$

Puntaje: derivar (3 pts), factorizar módulo (7 pts), $\mathbf{T}$ (5 pts).

b) Curvatura y torsión (20 pts).
$\mathbf{r}''(t) = \langle 0, 1, t \rangle$, $\mathbf{r}'''(t) = \langle 0, 0, 1 \rangle$.

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix} = \left\langle t^2 - \tfrac{t^2}{2},\ -t,\ 1 \right\rangle = \left\langle \tfrac{t^2}{2},\ -t,\ 1 \right\rangle.$$

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2 = \frac{t^4}{4} + t^2 + 1 = \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^2, \quad |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = 1 + \frac{t^2}{2}.$$

$$\kappa(t) = \frac{1 + t^2/2}{(1 + t^2/2)^3} = \frac{1}{(1 + t^2/2)^2}.$$

$$\tau(t) = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2} = \frac{\langle t^2/2, -t, 1\rangle \cdot \langle 0, 0, 1\rangle}{(1 + t^2/2)^2} = \frac{1}{(1 + t^2/2)^2}.$$

Observación notable: $\kappa(t) = \tau(t)$ para todo t.

Puntaje: producto vectorial (5 pts), $|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|$ (5 pts), κ (5 pts), τ (5 pts).

Alternativa para κ: usando $\kappa = |\mathbf{T}'|/|\mathbf{r}'|$. Derivando $\mathbf{T}(t) = \langle 1,\, t,\, t^2/2\rangle/(1 + t^2/2)$ por la regla del cociente:

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{\langle 0, 1, t\rangle(1 + t^2/2) - \langle 1, t, t^2/2\rangle \cdot t}{(1 + t^2/2)^2} = \frac{\langle -t,\ 1 - t^2/2,\ t\rangle}{(1 + t^2/2)^2}.$$

$$|\mathbf{T}'(t)|^2 = \frac{t^2 + (1 - t^2/2)^2 + t^2}{(1 + t^2/2)^4} = \frac{(1 + t^2/2)^2}{(1 + t^2/2)^4} = \frac{1}{(1 + t^2/2)^2}, \quad |\mathbf{T}'(t)| = \frac{1}{1 + t^2/2}.$$

$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{1/(1 + t^2/2)}{1 + t^2/2} = \frac{1}{(1 + t^2/2)^2}. \checkmark$$

Puntaje alternativo: calcular $\mathbf{T}'$ (5 pts), simplificar $|\mathbf{T}'|$ (5 pts), $\kappa = |\mathbf{T}'|/|\mathbf{r}'|$ (5 pts); τ igual (5 pts).

c) $\mathbf{B}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ (15 pts).

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|} = \frac{\langle t^2/2,\ -t,\ 1\rangle}{1 + t^2/2}.$$

$\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t)$. Desarrollando el producto vectorial (factorizando el factor común $(1 + t^2/2)$):

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\langle -t,\ 1 - t^2/2,\ t\rangle}{1 + t^2/2}.$$

Verificación: $|\mathbf{N}|^2 = \left[2t^2 + (1 - t^2/2)^2\right]/(1 + t^2/2)^2 = (1 + t^2/2)^2/(1 + t^2/2)^2 = 1$. ✓

Alternativa para $\mathbf{N}$: usando $\mathbf{N} = \mathbf{T}'/|\mathbf{T}'|$ (con $\mathbf{T}'$ calculado arriba):

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\langle -t,\ 1 - t^2/2,\ t\rangle/(1 + t^2/2)^2}{1/(1 + t^2/2)} = \frac{\langle -t,\ 1 - t^2/2,\ t\rangle}{1 + t^2/2}. \checkmark$$

Puntaje: $\mathbf{B}$ (7 pts), cálculo $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ (8 pts).

Puntaje alternativo: si se usó la alternativa de (b), normalizar $\mathbf{T}'$ para obtener $\mathbf{N}$ (15 pts); si no, calcular $\mathbf{T}'$ y $|\mathbf{T}'|$ (7 pts), $\mathbf{N} = \mathbf{T}'/|\mathbf{T}'|$ (8 pts). Nota: $\mathbf{B}$ sigue siendo necesario para el plano osculador en (d).

d) Plano osculador en $t = 1$ (10 pts).
$\mathbf{r}(1) = \langle 1,\, 1/2,\, 1/6\rangle$. $\mathbf{B}(1) = \langle 1/2,\, -1,\, 1\rangle/(3/2) = \langle 1/3,\, -2/3,\, 2/3\rangle$.
El plano osculador tiene normal $\mathbf{B}(1)$ y pasa por $\mathbf{r}(1)$:

$$\frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{3}\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(z - \frac{1}{6}\right) = 0 \implies \boxed{x - 2y + 2z = \tfrac{1}{3}}.$$

Puntaje: punto e identificar normal $\mathbf{B}(1)$ (5 pts), ecuación del plano (5 pts).
Nota: Si escribe la parametrización del plano en lugar de la ecuación cartesiana, por ejemplo usando T y N, distribución similar de los puntos (5 por los vectores y 5 por la ecuación.).

4. Sea la hélice generalizada

$$\mathbf{r}(t) = \langle a\cos t,\ a\,\mathrm{sen}\, t,\ bt\rangle, \quad a, b > 0, t \in \mathbb{R}.$$

(a) **(20 pts)** Calcula $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$.

(b) **(20 pts)** Calcula κ y τ en términos de a y b. ¿Son constantes?

(c) **(20 pts)** Verifica la *segunda ecuación de Frenet–Serret*:

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa\,\mathbf{T} + \tau\,\mathbf{B}.$$

Solución: Sea $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ por brevedad.

a) $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ (20 pts).
$\mathbf{r}'(t) = \langle -a\,\mathrm{sen}\, t,\ a\cos t,\ b\rangle, \quad |\mathbf{r}'| = c.$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{c}\langle -a\,\mathrm{sen}\, t,\ a\cos t,\ b\rangle.$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{c}\langle -a\cos t,\ -a\,\mathrm{sen}\, t,\ 0\rangle, \quad |\mathbf{T}'| = \frac{a}{c}.$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'}{|\mathbf{T}'|} = \langle -\cos t,\ -\,\mathrm{sen}\, t,\ 0\rangle.$$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \frac{1}{c}\langle b\,\mathrm{sen}\, t,\ -b\cos t,\ a\rangle.$$

Puntaje: $\mathbf{T}$ (7 pts), $\mathbf{N}$ (6 pts), $\mathbf{B}$ (6 pts).
Nota: Si obtiene los vectores con otro método (correcto) obtiene el mismo puntaje.

b) κ y τ (20 pts).

$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{a/c}{c} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Para la torsión, $\mathbf{B}'(t) = \frac{1}{c}\langle b\cos t,\ b\,\mathrm{sen}\, t,\ 0\rangle$:

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{\mathbf{B}'}{|\mathbf{r}'|} = \frac{1}{c^2}\langle b\cos t,\ b\,\mathrm{sen}\, t,\ 0\rangle = -\tau\,\mathbf{N} = \frac{b}{c^2}\langle \cos t,\ \mathrm{sen}\, t,\ 0\rangle,$$

$$\tau = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Ambas son **constantes**.

Puntaje: κ (10 pts), τ (10 pts).

Nota: Si obtiene κ o τ con otro método (correcto) obtiene el mismo puntaje.

c) Verificación de la segunda ecuación de Frenet–Serret (20 pts).
$\mathbf{N}'(t) = \langle \operatorname{sen} t,\, -\cos t,\, 0 \rangle$.

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{\mathbf{N}'}{|\mathbf{r}'|} = \frac{1}{c}\langle \operatorname{sen} t,\, -\cos t,\, 0 \rangle.$$

Calculamos $-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$:

$$-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} = \frac{1}{c(a^2+b^2)}\Big[a\langle a \operatorname{sen} t,\, -a\cos t,\, -b\rangle + b\langle b \operatorname{sen} t,\, -b\cos t,\, a\rangle\Big]$$

$$= \frac{1}{c(a^2+b^2)}\langle (a^2+b^2)\operatorname{sen} t,\, -(a^2+b^2)\cos t,\, 0\rangle = \frac{1}{c}\langle \operatorname{sen} t,\, -\cos t,\, 0\rangle.$$

Coincide con $d\mathbf{N}/ds$. ✓

Puntaje: calcular $d\mathbf{N}/ds$ (7 pts), calcular $-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$ (8 pts), igualdad (5 pts).