Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Daniel Gajardo.
Ayudante: Camila Pérez

Cálculo III - MAT1630

Interrogación 2 - Solución

1. (a) Un alambre tiene la forma de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$. Si la densidad del alambre en cada punto (x, y) es $\rho(x, y) = xy + 1$, calcule la masa del alambre.

   Solución. Podemos parametrizar la curva como $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$, $0 \leq t \leq \pi$, de forma que $|r'(t)| = 1$. Luego,

   $$m = \int_C \rho(x, y)ds = \int_0^\pi (\cos(t)\text{sen}(t) + 1) \cdot 1dt = \left(\frac{\text{sen}^2(t)}{2} + t \right) \Big|_0^\pi = \pi$$

   □

   (b) Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(xz, y^2, -\frac{1}{z} \right)$ al mover una partícula a través de la curva $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $1 \leq t \leq 2$.

   Solución. Tenemos que $\mathbf{r}'(t) = (1, 2t, 3t^2)$. Luego, el trabajo W es:

   $$\begin{aligned} W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_1^2 \left(t^4, t^4, -\frac{1}{t^3} \right) \cdot (1, 2t, 3t^2)dt \\ &= \int_1^2 t^4 + 2t^5 - \frac{3}{t}dt \\ &= \left(\frac{t^5}{5} + \frac{2t^6}{6} - 3\ln(t) \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{31}{5} + \frac{63}{3} - 3\ln(2) \end{aligned}$$

   □

Distribución del puntaje

- **a) [0.5p]** Por reconocer, implícita o explícitamente, que $m = \int_C \rho(x, y)ds$.
- **a) [0.5p]** Por saber, implícita o explícitamente, que $\int_C \rho(x, y)ds = \int_a^b \rho(x(t), y(t))|\mathbf{r}'(t)|dt$.
- **a) [0.7p]** Por la fórmula de la parametrización.
- **a) [0.3p]** Por el intervalo de la parametrización, sólo en caso de que la fórmula sea correcta.
- **a) [0.5p]** Por reemplazar adecuadamente la parametrización correcta en la integral.
- **a) [0.5p]** Por el resultado final.

- **b)** [**0.5p**] Por reconocer, implícita o explícitamente, que $W = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.
- **b)** [**0.5p**] Por saber, implícita o explícitamente, que $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$.
- **b)** [**0.5p**] Por el cálculo correcto de $\mathbf{r}'(t)$.
- **b)** [**0.5p**] Por reemplazar adecuadamente la parametrización en la integral.
- **b)** [**1p**] Por el resultado final.

---

2. Calcule un potencial del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (2xy, x^2)$. Utilícelo para evaluar la integral $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde la curva $\mathcal{C}$ tiene parametrización

$$\mathbf{r}(t) = (t^3 \text{sen}(\pi t), (1-t) + \cos(\pi t^2)) \quad 0 \leq t \leq 1$$

Solución. Cualquier potencial $f(x,y)$ debe cumplir que $\partial f/\partial x = 2xy$, de donde $f(x,y) = \displaystyle\int 2xy dx = x^2 y + g(y)$. Derivando respecto a y tenemos que $x^2 + g'(y) = x^2$, de donde $g'(y) = 0$ y por tanto $g(y) = C$. Así, cualquier potencial es de la forma $f(x,y) = x^2 y + C$, y podemos elegir $f(x,y) = x^2 y$. Por Teorema Fundamental de integrales de línea, tenemos que

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(1)) - f(\mathbf{r}(0)) = f(0,-1) - f(0,2) = 0$$

□

Distribución de puntaje

- **[2p]** Por el cálculo del potencial.
  Pueden escribir el potencial sin desarrollo. En caso de saber que se debe integrar respecto a una variable y derivar, pero con errores, entregar 1p.
- **[1p]** Por conocer el Teorema Fundamental de integrales de línea.
- **[1p]** Por calcular los extremos de la curva.
- **[2p]** Por el resultado final.
  En caso de error en el potencial o en los extremos, dar 1 punto. En caso de error en ambos, no corresponderá puntaje.

---

3. Considere $\mathcal{C}$ la parábola $y = 2 - x^2$, $-1 \leq x \leq 1$ con punto inicial $(-1, 1)$ y punto final $(1, 1)$. Calcule la integral

$$\int_{\mathcal{C}} ye^{xy}dx + \left(\frac{\text{sen}(y)}{y} + xe^{xy}\right) dy$$

Solución. Sea $\mathbf{F}(x, y) = \left(ye^{xy}, \frac{\text{sen}(y)}{y} + xe^{xy}\right)$. Consideremos la región simplemente conexa $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial y} ye^{xy} = e^{xy} + xye^{xy} \text{ y } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\text{sen}(y)}{y} + xe^{xy}\right) = e^{xy} + xye^{xy}$$

Por lo que $\mathbf{F}$ es conservativo en R. Luego, la integral pedida no depende del camino. Consideremos el camino $\mathcal{C}_2$ $\mathbf{r}(t) = (t, 1)$, $-1 \leq t \leq 1$, de manera que $\mathbf{r}'(t) = (1, 0)$. Así,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} ye^{xy}dx + \left(\frac{\text{sen}(y)}{y} + xe^{xy}\right) dy &= \int_{\mathcal{C}_2} ye^{xy}dx + \left(\frac{\text{sen}(y)}{y} + xe^{xy}\right) dy \\
&= \int_{-1}^{1} e^t \cdot 1 + \left(\frac{\text{sen}(1)}{1} + te^t\right) \cdot 0dt \\
&= e^t\Big|_{-1}^{1} = e - \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

Observación: Otra posible solución es definir la región D entre la curva pedida y el segmento de recta, y utilizar Teoremas de Green sobre esa región. □

Distribución de puntaje

- **[1p]** Por probar la igualdad de las derivadas cruzadas.
- **[1p]** Por definir una región simplemente conexa y concluir que $\mathbf{F}$ es conservativa en esa región.
- **[0.5p]** Por saber que conservativo implica independiente de camino.
- **[1p]** Por parametrizar la curva sobre la que se integrará.
- **[0.5p]** Por el intervalo de la parametrización.
- **[1p]** Por reemplazar correctamente en la integral.
- **[1p]** Por el resultado final.

---

4. (a) Calcule el área entre un arco de la cicloide $x(t) = t - \text{sen}(t)$, $y(t) = 1 - \cos(t)$ y el eje X.

Solución. Sea $\mathcal{C}_1$ la curva $\mathbf{r}(t) = (t - \text{sen}(t), 1 - \cos(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y $\mathcal{C}_2$ el segmento rectilíneo con parametrización $\mathbf{r}(t) = (t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Si D es la región entre el arco de la cicloide y el eje X, entonces su frontera (orientada positivamente) es $-\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, donde $-\mathcal{C}_1$ es la curva $\mathcal{C}_1$ orientada en sentido opuesto. Por teorema de Green,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(D) = \iint_D 1 dA &= -\oint_{\mathcal{C}_1} -y dx + \oint_{\mathcal{C}_2} -y dx \\
&= \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))(1 - \cos(t)) dt - \int_0^{2\pi} 0 \cdot (1 - \cos(t)) dt \\
&= \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos(t) + \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt \\
&= \left(t - 2\text{sen}(t) + \frac{t}{2} + \frac{\text{sen}(2t)}{2} \right) \Bigg|_0^{2\pi} \\
&= 3\pi
\end{aligned}$$

□

(b) Sea $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ un campo vectorial con derivadas continuas definido en $\mathbb{R}^2 - \{(x_0, y_0)\}$, tal que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ en todo su dominio. Demuestre que, si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son curvas cerradas, suaves, orientadas positivamente, conteniendo en su interior a (x_0, y_0), entonces $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$
(*Indicación: Considere una circunferencia $\mathcal{C}$ de radio suficientemente pequeño o grande*)

Solución. Consideremos $\mathcal{C}$ una circunferencia centrada en (x_0, y_0) de radio suficientemente pequeño de manera que se encuentre al interior de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, orientada en sentido horario. Sea D la región entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_1$, de manera que D no contiene a (x_0, y_0) y la frontera de D, orientada positivamente, es $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}$. Luego, por Teorema de Green,

$$\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Y, por tanto,

$$\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Un cálculo análogo muestra que

$$\oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

por lo que

$$\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

□

Distribución de puntaje:

- **a)** [**0.5p**] Por identificar la región sobre la que se aplicará T. de Green.
- **a)** [**0.5p**] Por identificar la frontera de D **orientada correctamente**.
- **a)** [**0.5p**] Por la aplicación correcta del T. de Green.
- **a)** [**0.5p**] Por la integral sobre el segmento rectilíneo.
- **a)** [**1p**] Por el resultado final.
- **b)** [**0.5p**] Por definir alguna circunferencia en el interior de ambas curvas o en el exterior de ambas curvas.
- **b)** [**0.5p**] Por identificar la región sobre la que se aplicará T. de Green
- **b)** [**0.5p**] Por identificar las fronteras orientadas correctamente.
- **b)** [**1p**] Por aplicar correctamente el T. de Green y concluir la igualdad entre las integrales.
- **b)** [**0.5p**] Por concluir.