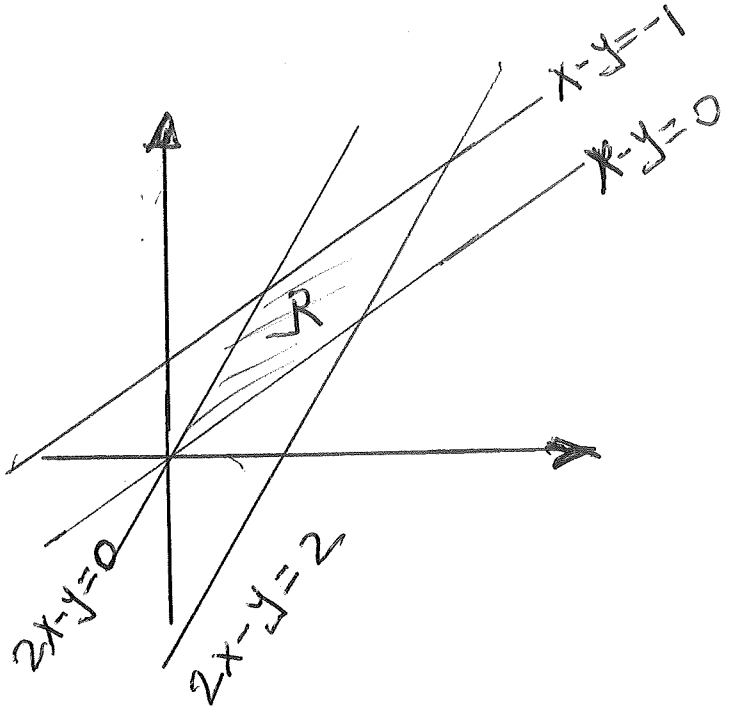
(1)

La región de integración se muestra en la figura



Hacemos

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = 2x - y \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = -u + v \\ y = -2u + v \end{cases}$$

y $R \longrightarrow R^* = \{(u,v) : -1 \le u \le 0 \; ; \; 0 \le v \le 2\}$

Entonces,

$$\iint_R xy\,dx\,dy = \iint_{R^*} (v-u)(v-2u) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

como $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$, obtenemos

$$\iint_R xy\,dx\,dy = \int_0^2 \int_{-1}^0 (v^2 - 3uv + 2u^2)\,du\,dv$$

$$= \int_0^2 \left(v^2 + \frac{3v}{2} + \frac{2}{3}\right) dv = 7.$$

(2) Sea D_1 la proyección de D sobre plano YZ

D_1 es el triángulo acotado por los ejes Z, Y y la recta $\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.

Podemos escribir $D_1=\{(y,z): 0\le z\le 3;\ 0\le y\le 2-\frac{2}{3}z\}$

Para cada $(y,z)\in D_1$, $\quad 0\le x\le 1-\frac{y}{2}-\frac{z}{3}$

Así,
$$I=\int_0^3\int_0^{(2-\frac{2}{3}z)}\int_0^{(1-\frac{y}{2}-\frac{z}{3})} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Si escribimos D_1 en el orden inverso,

$$D_1=\{(y,z): 0\le y\le 2;\ 0\le z\le 3-\tfrac{3}{2}y\}$$

Así,
$$I=\int_0^2\int_0^{(3-\frac{3}{2}y)}\int_0^{(1-\frac{y}{2}-\frac{z}{3})} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$$

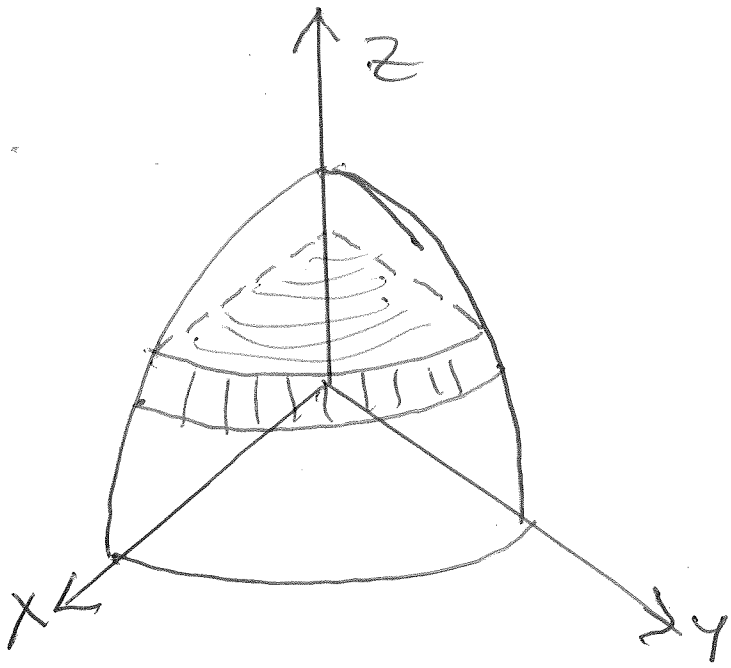
Por último, la proyección de D sobre plano XY es $D_2=\{(x,y): 0\le x\le 1;\ 0\le y\le 2-2x\}$

Luego,
$$I=\int_0^1\int_0^{(2-2x)}\int_0^{(3-3x-\frac{3}{2}y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

(3) La figura muestra la región R de integración. La intersección de la esfera con plano $z=z_0$ produce

$x^2+y^2=-z_0^2+9$

r^2 en coords cilíndricas



En coords. <u>cilíndricas</u>

$$R=\{(r,\theta,z): 0\le\theta\le\tfrac{\pi}{2};\ 1\le z\le 2;\ 0\le r\le\sqrt{9-z^2}\}$$

y la densidad se convierte en

$$\delta(r,\theta,z)=3(r^2+z^2).$$

La masa total es, pues,

$$M=3\int_0^{\pi/2}\int_1^2\int_0^{\sqrt{9-z^2}}(r^2+z^2)\,r\,dr\,dz\,d\theta$$

$$=\frac{3\pi}{2}\underbrace{\int_1^2\left[\frac{(9-z^2)^2}{4}+\frac{z^2(9-z^2)}{2}\right]dz}_{439/30}$$

$$=\frac{439}{2}\pi$$

(4) Es sabido que el campo $\vec{F} = \vec{\nabla}(-f)$

donde $f(x,y,z) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $(\text{en } \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\})$

Luego, las integrales desde $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ se calculan por

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{\nabla} f(x,y,z) \cdot d\vec{r}$$

$$= f(P_2) - f(P_1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

$$= \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$$

(depende sólo de R_1 y R_2)

(5) Por el Teorema fundamental,

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,2)} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(1,1,2) - \underbrace{f(0,0,0)}_{5}$$

Para conocer la integral debemos buscar una trayectoria apropiada desde $(0,0,0)$ hasta $(1,1,2)$
Hacemos trayecto por segmentos

$$(0,0,0) \xrightarrow[\gamma_1]{} (1,0,0) \xrightarrow[\gamma_2]{} (1,1,0) \xrightarrow[\gamma_3]{} (1,1,2)$$

γ_1: $x=t$; $y=z=0$, $0 \le t \le 1$

$$\int_{\gamma_1} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \int_0^1 0\,dt = 0$$

γ_2: $x=1$, $y=t$, $z=0$, $0 \le t \le 1$

$$\int_{\gamma_2} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \int_0^1 0 \cdot dt = 0$$

γ_3: $x=1$, $y=1$, $z=t$ $\quad 0 \le t \le 2$

$$\int_{\gamma_3} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \int_0^2 1 \cdot e^{1^2} dt = 2e$$

$\therefore$ $f(1,1,2) = 2e+5$ //