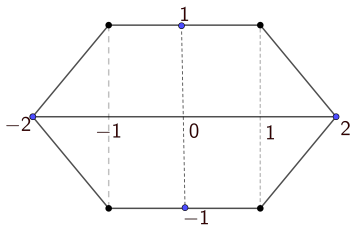
# MAT–1630 - CÁLCULO III
# INTERROGACIÓN 2 PAUTA CORRECCIÓN

1. Sea $\gamma$ la curva poligonal con vértices en los puntos $(2,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-2,0)$, $(-1,-1)$ y $(1,-1)$. Calcule la integral de línea $\int_\gamma (x-y^2)dx + (3x+y)dy$ .

**Solución.** La curva poligonal encierra la región $R$ siguiente:




Dibuja correctamente la región $R$ (**0,5 pto**)

$R = \{(x,y) : -2 \le x \le -1\,,\ -x-2 \le y \le x+2\} \cup \{(x,y) : -1 \le x \le 1\,,\ -1 \le y \le 1\}$
$\cup \{(x,y) : 1 \le x \le 2\,,\ x-2 \le y \le -x+2\}$ Parametriza la región $R$ (**0,5 pto**)
Llamenos $P(x,y) = (x-y^2)$, $Q(x,y) = (3x+y)$. Las funciones $P, Q$ son $C^1$ en todo el plano. Además

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3 + 2y\,.$$ Calcula la expresión (**0,5 pto**)

Como $\gamma$ encierra a $R$, en virtud del Teorema de Green, obtenemos que

$$I = \int_\gamma (x-y^2)dx + (3x+y)dy = \iint_R (3+2y)dxdy\,.$$ Explicita la igualdad de Green (**1 pto**)

Calculando la integral de área, en cada pedazo, se obtiene que

$$I_1 = \int_{-2}^{-1}\int_{-x-2}^{x+2} (3+2y)dydx = \int_{-2}^{-1} 6(x+2)\,dx = 3\,,$$ Calcula $I_1$ (**1 pto**)

$$I_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (3+2y)dydx = 12\,.$$ Calcula $I_2$ (**1 pto**)

y

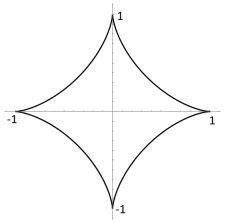
$$I_3 = \int_{1}^{2}\int_{x-2}^{-x+2} (3+2y)dydx = \int_{1}^{2} -6(x-2)\,dx = 3\,.$$ Calcula $I_3$ (**1 pto**)

Sumando, $I = I_1 + I_2 + I_3 = 18$ Calcula $I$ (**0,5 pto**)

La integral de línea se puede calcular directamente parametrizando las curva, deben realizar seis integrales. ( 1 punto por cada una)

2. (a) Sea $\Gamma$ la curva que sigue de la intersección del cilindro elíptico $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ y el plano $4y+3z=1$. Calcular la masa de la curva $\Gamma$ si la densidad en $(x,y,z)$ está dada por $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$ gramos por unidad de longitud de alambre.

   (b) Calcule el área de la región acotada $R$ en el plano encerrada por la curva $\vec{r}(t)=(\cos^3 t\,,\,\operatorname{sen}^3 t)$, $t\in[0,2\pi]$.




**Solución. (a)**

Una parametrización para la curva $\Gamma$ es $r(t)=(5\cos(t),3\operatorname{sen}(t),1/3-4\operatorname{sen}(t))$, con $t\in[0,2\pi]$. Parametriza $\Gamma$ (**1,0 pto**)

La masa del alambre es $\int_\Gamma \rho\,ds=\int_0^{2\pi}\rho(r(t))\,\|r'(t)\|\,dt$ . Masa como integral(**0,5 pto**)

Además $\|r'(t)\|=\sqrt{25\operatorname{sen}^2(t)+9\cos^2(t)+16\cos^2(t)}=5$. Calcula norma de $r'$ (**0,5 pto**)

$$\int_\Gamma \rho\,ds=5\int_0^{2\pi}(9+16\cos^2(t))\,dt=90\pi+80\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt$$ Desarrolla integrando (**0,5 pto**)

$$=90\pi+80\pi=170\pi$$ Calcula masa de $\Gamma$ (**0,5 pto**)

**Solución. (b)** Usando la Fórmula de Green para $F=(P,Q):=(-y,x)$ y la curva $\gamma$ parametrizada por $\vec{r}(t)=(\cos^3 t\,,\,\operatorname{sen}^3 t)$, $t\in[0,2\pi]$ se tiene que

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot\mathbf{dr}=\int_\gamma x dy-y dx=2\iint_R dA=2A(R)$$ Área como integral de línea (**1 pto**)

(también se puede aplicar $A(R)=\int_\gamma x\,dy$).

Se desarrola la integral de línea Desarrolla integral (**1 pto**)

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot\mathbf{dr}=\int_0^{2\pi}(-\operatorname{sen}^3 t\,,\,\cos^3 t)\cdot(-3\cos^2 t\sin t,3\operatorname{sen}^2 t\cos t)\,dt=\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}(\operatorname{sen}2t)^2\,dt$$

Calculando la integral

$$\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}(\operatorname{sen}2t)^2\,dt=\frac{3}{4}\pi\,.$$ Calcula la integral (**0,5 pto**)

Por lo tanto, el área de $R$ es $\frac{3}{8}\pi$. Calcula el área (**0,5 pto**)

3. Considere el campo vectorial $\vec{F}$ definido en el primer cuadrante $D = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ :

$$\vec{F}(x, y) = \left( \frac{y^2}{x(x^2 + y^2)}, \frac{x^2}{y(x^2 + y^2)} \right).$$

(a) Calcule la integral de línea de $\vec{F}$ sobre el trazo rectilíneo $L$ que va desde $(1, 1)$ a $(3, 3)$.

(b) Determine la integral de línea de $\vec{F}$ sobre la curva parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (2 - \cos(\pi t), 1 + 2t^2)$, $t \in [0, 1]$.

**Solución. (a)** Parametrizamos el trazo $L$ por: $\mathbf{r_1}(t) = (t, t)$, $t \in [1, 3]$ cuyo vector tangente es $\mathbf{r_1}'(t) = (1, 1)$. Parametriza trazo $L$ (**1 pto**)

De esta manera

$$\int_L \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^3 \vec{F}(\mathbf{r_1}(t)) \cdot \mathbf{r_1}'(t)\, dt = \int_1^3 \left( \frac{1}{2t}, \frac{1}{2t} \right) \cdot (1, 1)\, dt$$ Desarrolla la integral de línea (**1 pto**)

Luego,

$$\int_L \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^3 \frac{1}{t}\, dt = \ln(3).$$ Calcula la integral (**1 pto**)

**Solución. (b)** Llamemos $C$ a la curva parametrizada por $\mathbf{r}(t)$.

Observamos que el campo vectorial $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$ cumple que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$ Verifica la condición (**1 pto**)

en todo su dominio $D = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$, que es una *región simplemente conexa*. Explicita que es s.c. (**0,5 pto**)

Por lo tanto, $\vec{F}$ es conservativo es decir, $\vec{F} = \nabla f$ para algún $f$ y por el Teorema Fundamental del Cálculo es independiente de caminos. Concluye independencia (**0,5 pto**)

Observamos que $\mathbf{r}(0) = (1, 1)$ y $\mathbf{r}(1) = (3, 3)$, tiene igual punto inicial y final que el trazo rectilíneo $L$ de la parte $(a)$, Verifica los valores extremos de $C$ (**0,5 pto**)

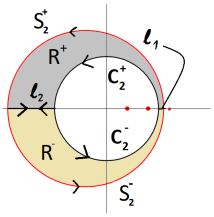
Luego

$$\int_C \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = f(3, 3) - f(1, 1) = \int_L \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = \ln(3).$$ Explicita resultado (**0,5 pto**)

4. Suponga que $\vec{F}$ es un campo vectorial conservativo en la región $\mathbb{R}^2\backslash\{(n,0),\ n\ \text{entero positivo}\ \}$ tal que $\int_{C_n}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}=n$ para $n=1,2...$, donde $C_n$ es la circunferencia con centro $(0,0)$ y radio $n+1/2$. Calcule la integral de línea de $\vec{F}$ sobre $S_2$; la circunferencia de centro $(-1,0)$ y radio $15/4$.

**Solución.** Observamos que la circunferencia $S_2$ encierra las singularidades $(1,0)$ y $(2,0)$ del campo. Identifica singularidades (**0,5 pto**)

Por otro lado, por definición de $C_2$, ella también encierra estos puntos $(1,0)$ , $(2,0)$.
Ubica singularidades c/r a $C_2$ independencia (**0,5 pto**)




La región $R^+$ que encierra la curva cerrada $\gamma_1=S_2^+\cup l_2\cup(-C_2^+)\cup l_1$ es simplemente conexa y el campo $\vec{F}$ es conservativo en esa región. Explicita tipo de conexidad (**0,5 pto**)

Luego, aplicando el Teorema de Green en la región $R^+$ se obtiene que

$$\int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}=\int\int_{R^+}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dA=0$$ Calcula integral sobre $\gamma_1$ (**0,5 pto**)

Similarmente, para la región simplemente conexa $R^-$ encerrada por la curva $\gamma_2=S_2^-\cup(-l_1)\cup(-C_2^-)\cup(-l_2)$ Identifica una curva (**0,5 pto**)

$$\int_{\gamma_2}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}=\int\int_{R^-}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dA=0$$ Calcula integral (**0,5 pto**)

Por lo tanto, descomponiendo cada integral de línea se obtiene

$$\int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{S_2^+}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_{l_1}F\cdot d\mathbf{r}+\int_{-C_2^+}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_{l_2}F\cdot d\mathbf{r}=0.$$ Descompone $\gamma_1$ (**0,5 pto**)

$$\int_{\gamma_2}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{S_2^-}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_{-l_1}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_{-C_2^-}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_{-l_2}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}=0.$$ Descompone $\gamma_2$ (**0,5 pto**)

Además $\int_{-l_i}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}=-\int_{l_i}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}$, $i=1,2$. Luego, sumando: Explicita cambio de orientación (**0,5 pto**

$$\int_{S_2^+}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_{S_2^-}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_{-C_2^+}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_{-C_2^-}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}=0$$ Obtiene identidad (**0,5 pto**)

Puesto que $\int_{-C_2^+}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}=-\int_{C_2^+}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}$ , $\int_{-C_2^-}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}=-\int_{C_2^-}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}$ se obtiene que

$$\int_{S_2}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{S_2^+}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_{S_2^-}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{C_2^+}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_{C_2^-}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\mathbf{r}=2$$ Concluye respuesta (**1 pto**)