Interrogación 2 de Cálculo III

1. (a) Considerar un triángulo de área A fija y lados a, b, c. Dado un punto O al interior del triángulo, se bajan perpendiculares de largos x, y, z hacia los lados respectivos a, b, c. Si se construye un paralelepípedo recto de aristas x, y, z y volumen V, probar que V es máximo cuando las líneas que unen O a los vértices P, Q, R del triángulo lo dividen en tres áreas iguales. Determinar cuál es el máximo de V en este caso.

Solución: Siguiendo las notaciones de la figura, se observa que el área del triángulo es igual a la suma de aquellas de los triángulos $\Delta_1 = OPQ$, $\Delta_2 = OQR$, $\Delta_3 = ORP$. Notar que el área de Δ_1 se escribe

$$\frac{1}{2}x(PS + SQ) = \frac{1}{2}xa.$$

Operando de manera análoga con los triángulos Δ_2, Δ_3, se tiene

$$xa + yb + zc = 2A.$$

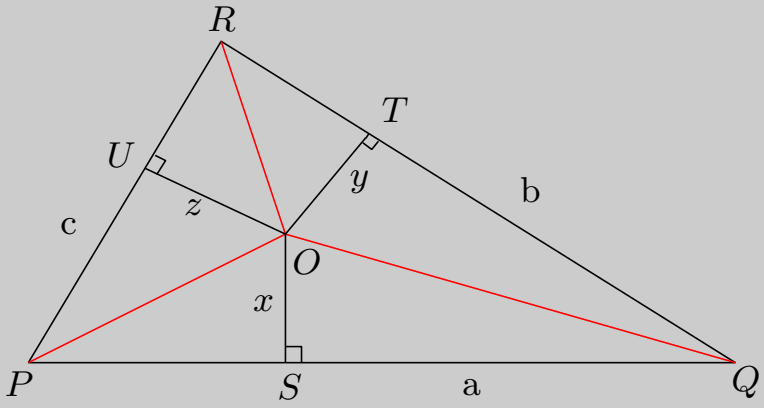
Sean $f(x, y, z) = xyz$, $g(x, y, z) = xa + yb + zc - 2A$, y $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$. El problema planteado equivale a maximizar la función $f(x, y, z)$ sobre los puntos (x, y, z) en que $g(x, y, z) = 0$. Todas las funciones anteriores son de clase C^1 y se tiene $\nabla g(x, y, z) = (a, b, c)$, para todo (x, y, z), en consecuencia, podemos aplicar el método de Lagrange y se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z, \lambda) &= zy - \lambda a = 0 && (1)\\
\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z, \lambda) &= xz - \lambda a = 0 && (2)\\
\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z, \lambda) &= yx - \lambda a = 0 && (3)\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) &= ax + by + cz - 2A = 0. && (4)
\end{aligned}$$

De estas ecuaciones se deduce en primer lugar que

$$\frac{yz}{a} = \frac{zx}{b} = \frac{xy}{c}.$$

Luego, $y = ax/b$ y $z = ax/c$. Reemplazando en la ecuación (4), se tiene $3ax = 2A$, de donde $x = 2A/3a$, $y = 2A/3b$, $z = 2A/3c$. Luego, las áreas de los triángulos Δ_i, $i = 1, 2, 3$, son respectivamente: $\frac{1}{2}\frac{2A}{3a}a = \frac{A}{3}$, $\frac{1}{2}\frac{2A}{3b}b = \frac{A}{3}$, $\frac{1}{2}\frac{2A}{3c}c = \frac{A}{3}$. Con esto se tiene $V = \dfrac{8A^3}{27abc}$.



(b) El plano $x+y+2z = 2$ intersecta al paraboloide $z = x^2+y^2$ en una elipse. Encontrar los puntos de la elipse que están más cercanos y más alejados del origen.

Solución: En este ejercicio se nos pide encontrar los puntos que maximizan y minimizan la función distancia $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sujeto a las condiciones $g_1(x, y, z) = x+y+2z-2 = 0$ y $g_2(x, y, z) = x^2+y^2-z = 0$. Claramente, encontrar los puntos que optimizan la función d es equivalente a encontrar los puntos que optimizan la función $d^2(x, y, z) = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, por simplicidad de cálculos trabajaremos con esta función.
Debemos hallar los valores de x, y, z que satisfacen

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g_1(x, y, x) + \mu \nabla g_2(x, y, z)$$

y

$$g_1(x, y, z) = 0 \qquad g_2(x, y, z) = 0$$

Como

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= (2x, 2y, 2z) \\ \nabla g_1(x, y, z) &= (1, 1, 2) \\ \nabla g_2(x, y, z) &= (2x, 2y, -1) \end{aligned}$$

igualando componentes y considerando las restricciones obtenemos el siguiente

sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcc} 2x & = & \lambda + 2\mu x \\ 2y & = & \lambda + 2\mu y \\ 2z & = & 2\lambda - \mu \\ x + y + 2z - 2 & = & 0 \\ x^2 + y^2 - z & = & 0 \end{array}$$

Resolviendo este sistema encontramos las coordenadas de dos puntos:

$$P_1 = (-1, -1, 2)$$

y

$$P_2 = (1/2,\ 1/2,\ 1/2).$$

Al evaluar la función f en los puntos P_1 y P_2 tenemos que

$$f(P_1) = 1 + 1 + 4 = 6 \qquad \text{y} \qquad f(P_2) = 1/4 + 1/4 + 1/4 = 3/4$$

Por lo tanto $P_2 = (1/2,\ 1/2,\ 1/2)$ es el punto de la elipse que está más cercano al origen y $P_1 = (-1, -1, 2)$ el más alejado.

2. Si $F(x, y) = (y - x^2)^2 - x^5$, encontrar soluciones de la forma $y = f(x)$ de la ecuación $F(x, y) = 0$, con f función de clase C^1, en una vecindad del punto $(1, 0)$ y, respectivamente, una vecindad del punto $(1, 2)$.Qué puede decir de lo que ocurre en torno a $(0, 0)$?

Solución: La función F es un polinomio en las variables x, y y es en consecuencia de clase C^1. Sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = -5\,x^4 + 4\,\big(x^2 - y\big)x,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -2\,x^2 + 2\,y.$$

Luego, en el punto $(1, 0)$ se tiene $F(1, 0) = 0$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = -2 \neq 0$. Por el Teorema de la Función Implícita, existe una vecindad abierta $X(1) \subset \mathbb{R}^+$ de 1; una vecindad $Y(0)$ de 0 y una única función $f : X(1) \to Y(0)$ de clase C^1 tal que $f(1) = 0$, $F(x, f(x)) = 0$, para todo $x \in X(1)$. En este caso la vecindad de $(1, 0)$ solicitada es $X(1) \times Y(0)$ y la función f se obtiene despejando y de la ecuación $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$ y escogiendo la raíz negativa de x^5:

$$f(x) = x^2 - x^{5/2},\ \text{para todo } x \in X(1).$$

En el caso del punto $(1,2)$, $F(1,2)=0$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,2)=2\neq 0$ y se puede aplicar nuevamente el Teorema de la Función Implícita, obteniendo vecindades $X(1)$, $Y(2)$ y una única función $f: X(1)\to Y(2)$ de clase C^1, en este caso $f(x)=x^2+x^{5/2}$, que satisface $F(x,f(x))=0$ en ese dominio.

En el punto $(0,0)$ no se puede aplicar el Teorema de la Función Implícita pues $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0)=0$. Ambas soluciones, $f(x)=x^2-x^{5/2}$ o $f(x)=x^2+x^{5/2}$ $x\geq 0$ son de clase $C^1[0,\infty)$ y satisfacen $f(0)=0$. La conclusión del TFI falla pues no hay unicidad.

3. Dada la aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, $\varphi:(u,v)\mapsto(x,y)$, definida por

$$x=\left(\frac{u+v}{2}\right)^{1/2},\ y=\left(\frac{v-u}{2}\right)^{1/2},$$

encontrar la imagen $D=\varphi(R)$ por esta aplicación (en el plano xy) del rectángulo R en el plano uv limitado por $u=1,\ u=4,\ v=9,\ v=16$ y calcular $\int\int_D xydxdy$.

Solución: Se tiene las relaciones

$$x^2+y^2=v;\ x^2-y^2=u.$$

Luego, $D=\varphi(R)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\leq x^2-y^2\leq 4,\ 9\leq x^2+y^2\leq 16\}$. La función φ es de clase C^1 en la región de $\mathbb{R}^2$ en que $u<v$, en particular, sobre R y su matriz Jacobiana es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(\frac{u+v}{2}\right)^{-1/2} & \frac{1}{4}\left(\frac{u+v}{2}\right)^{-1/2} \\ -\frac{1}{4}\left(\frac{v-u}{2}\right)^{-1/2} & \frac{1}{4}\left(\frac{v-u}{2}\right)^{-1/2} \end{pmatrix}$$

Y el Jacobiano es

$$\frac{1}{4\sqrt{v^2-u^2}},$$

Este Jacobiano es estrictamente positivo en R, luego, φ es biyectiva de R en $\varphi(R)$ y su inversa es también de clase C^1 (es un C^1 difeomorfismo).

Enseguida, usando el Teorema de Cambio de Variables, se tiene

$$\int\int_D xydxdy=\int_1^4\left(\int_9^{16}\frac{\sqrt{v^2-u^2}}{8\sqrt{v^2-u^2}}dv\right)du=\frac{1}{8}\int_1^4\left(\int_9^{16}dv\right)du=\frac{21}{8}.$$

4. Calcule el centro de masa del cuerpo inhomogéneo, de densidad $\rho(x,y,z) = z$, que puede ser descrito por la siguiente región :

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}.$$

Solución: Se sabe que el centro de masa se localiza en el punto $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in \Omega$, con

$$\overline{x} = \frac{1}{M} \iiint_\Omega x\, \rho(x,y,z)\, dxdydz, \quad \overline{y} = \frac{1}{M} \iiint_\Omega y\, \rho(x,y,z)\, dxdydz,$$
$$\overline{z} = \frac{1}{M} \iiint_\Omega z\, \rho(x,y,z)\, dxdydz,$$

donde M corresponde a la **masa total** del cuerpo :

$$M = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)\, dxdydz.$$

Dada la naturaleza esférica del cuerpo (en efecto corresponde a una octava parte de una esfera de radio 1 centrada en el origen), podemos considerar las coordenadas esféricas

$$x = r\cos\theta\sin\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\phi.$$

Es fácil ver que Ω corresponde a la imagen, a través del respectivo difeomorfismo, del rectángulo en el espacio $r\theta\phi$ dado por

$$\Omega' = \left\{(r,\theta,\phi) : 0 \leq r \leq 1,\, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\right\},$$

y

$$\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} \right| = r^2 \sin\phi.$$

Luego, por el teorema de cambio de variables, se tiene

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_{\Omega'} \rho(r,\theta,\phi) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right| dr d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r\cos\phi\, r^2 \sin\phi\, dr d\theta d\phi \\
(Fubini) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\sin\phi\, d\phi \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{\pi}{16}
\end{aligned}$$

Obs: El valor de la última integral se puede obtener, a modo de ejemplo, considerando el cambio de variable $u = \sin\phi$.

De igual modo calculamos las coordenadas del centro de masa, obteniendo:

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\sin\phi\,\cos\theta\, r\cos\phi\, r^2\sin\phi\, dr d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta\int_0^1 r^4\, dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\phi\sin^2\phi\, d\phi \\
&= \frac{16}{\pi}\cdot 1\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} \\
&= \frac{16}{15\pi},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\sin\theta\sin\phi\, r\cos\phi\, r^2\sin\phi\, dr d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\, d\theta\int_0^1 r^4\, dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\phi\sin^2\phi\, d\phi \\
&= \frac{16}{\pi}\cdot 1\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} \\
&= \frac{16}{15\pi},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\cos\phi\, r\cos\phi\, r^2\sin\phi\, dr d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1 r^4\, dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\phi\sin\phi\, d\phi \\
&= \frac{16}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

Obs: El valor de la integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\phi\sin^2\phi\, d\phi$ se puede obtener a través de la sustitución $u = \sin^2\phi$. De igual modo se puede obtener el valor de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\phi\sin\phi\, d\phi$,

considerando la sustitución $u = \cos^2 \phi$.

Luego, el centro de masa corresponde al punto de coordenadas

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \left(\frac{16}{15\pi}, \frac{16}{15\pi}, \frac{8}{15} \right).$$