Examen
Cálculo III – MAT1630

el 22 de noviembre de 2013

SOLUCIONES

Problema 1. Encuentre el valor mínimo y el valor máximo de la función

$$u(x,y,z) := -xyz + 6(x^2+y^2+z^2)$$

en la circumferencia

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1, \quad x+y+z = 0\right\}.$$

Solución: Los puntos de los extremos de u satisfacen el sistema

$$\begin{cases} -yz + 12x = 2\lambda x + \mu, \\ -xz + 12y = 2\lambda y + \mu, \\ -xy + 12z = 2\lambda z + \mu, \\ x^2+y^2+z^2 = 1, \\ x+y+z = 0, \end{cases} \tag{1}$$

donde λ y μ son los multiplicadores de Lagrange. Los puntos (x,y,z) que satisfacen (1) con algunos λ y μ son

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \ \left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}},\right), \ \left(\mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Tenemos

$$u\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = u\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = u\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{6}} + 6,$$

$$u\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = u\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = u\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{6}} + 6.$$

Por lo tanto,

$$u_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{6}} + 6, \quad u_{\min} = -\frac{1}{3\sqrt{6}} + 6.$$

Problema 2. Sea $\varphi(x,y) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$ una funcion diferenciable de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Suponga que $\varphi(0,0) = (0,0)$ y que

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(0,0) = -1$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Considere la funcion

$$F = \varphi \circ \varphi \circ \varphi.$$

Compruebe que la funcion F es invertible en una vecindad de $(0,0)$ y calcule la matriz jacobiana de su inversa en $(0,0)$.
Solución: La matriz jacobiana de φ en $(0,0)$ es

$$J_\varphi(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego la matriz jacobiana de F en $(0,0)$ es

$$J_F(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\det J_F(0,0) = 1 \neq 0$$

se tiene que F es invertible en un entorno de $(0,0)$.
Como la jacobiana de la inversa es la inversa de la jacobiana se tiene

$$J_{F^{-1}}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Problema 3. Calcule la integral

$$\int_C [(x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz]$$

donde C es el segmento de la curva

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = a\cos t,\ y = a\,\mathrm{sen}\, t,\ z = \frac{h}{2\pi}t, \quad t \in \mathbb{R}\right\}, \quad a > 0, \quad h > 0,$$

del punto $(a, 0, 0)$ al punto $(a, 0, h)$.

Solución: Sea

$$\mathbf{F}(x, y, z) := (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

El campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Además, el cálculo directo implica

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{F}(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \tag{2}$$

Observación: La igualdad (2) también sigue del hecho que $\mathbf{F}$ es conservativo; tenemos $\mathbf{F} = \nabla f$ con $f(x, y, z) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - xyz$.
Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ cualquier superficie regular acotada tal que $\partial K = C - C_1$. Por ejemplo, puede ser

$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = \rho\cos\left(\frac{2\pi z}{h}\right) + a - \rho, y = \rho\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi z}{h}\right),\ \rho \in [0, a],\ z \in [0, h]\right\}.$$

Entonces, por la fórmula de Stokes y (1) tenemos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} - \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_K \mathrm{rot}\, \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

con la orientación apropiada de K.
Observación: La igualdad

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} - \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 0 \tag{3}$$

sigue también directamente de los hechos que el campo $\mathbf{F}$ es conservativo y el camino $C - C_1$ es cerrado, sin aplicación del teorema de Stokes.
Por (3),

$$\int_C [(x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz] = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} =$$

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^h z^2 dz = \frac{h^3}{3}.$$

Problema 4.

a) Sean u y v dos funciones con segundas derivadas continuas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Demuestre que

$$\text{div}\,(u\nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v.$$

b) Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Sea v una funcion con segundas derivadas continuas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Denotaremos por $\hat{n}$ al vector normal exterior.

Suponga que

$$\Delta v(x,y) = 0 \text{ para todo } (x,y) \in D$$

y que

$$\nabla v \cdot \hat{n}(x,y) + v(x,y) = 0 \text{ para todo } (x,y) \in \partial D$$

Compruebe que

$$v(x,y) = 0 \text{ para todo } (x,y) \in D.$$

Solucion :

a) Sean $u = u(x,y), v = v(x,y)$ se tiene que $u\nabla(v) = (uv_x, uv_y)$ por lo tanto

$$\nabla(uv_x, uv_y) = u_x v_x + uv_{xx} + u_y v_y + uv_{yy} = \nabla u \cdot \nabla v + u\nabla v.$$

b) Consideremos la integral de linea

$$\int_{\partial D} (v\nabla v) \cdot \hat{n}\, ds$$

por el Teorema de la divergencia tenemos que esta integral es igual a

$$\int_D \int (\nabla v)^2 dA + \int_D \int v \triangle v dA.$$

pero por hipótesis se concluye que

$$\int_{\partial D} (v\nabla v) \cdot \hat{n}\, ds = \int_D \int (\nabla v)^2 dA,$$

Ahora, tenemos que $\nabla v \cdot \hat{n} = -v$ para $(x,y) \in \partial D$ luego la igual anterior se transforma en:

$$\int_{\partial D} -v^2 ds = \int_D \int (\nabla v)^2 dA.$$

de donde se concluye que la funcón v debe ser constante e igual a cero.