PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2019

MAT1630 - Cálculo III
Interrogación 1

1. Sea $r : [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ la curva dada por

$$r(t) = (t^2, 2t, \cos t).$$

(a) Encuentre un punto P de la curva en el que la torsión sea nula.
(b) Determine los vectores tangente, normal y binormal en este punto P.

Solución.

(a) Calculamos los vectores derivadas

$$r'(t) = (2t, 2, -\sin t) \quad , r''(t) = (2, 0, -\cos t) \quad , r'''(t) = (0, 0, \sin t).$$

Determinamos t tal que $(r'(t), r''(t), r'''(t)) = 0$. Entonces

$$\det \begin{pmatrix} 2t & 2 & -\sin t \\ 2 & 0 & -\cos t \\ 0 & 0 & \sin t \end{pmatrix} = -4 \sin t = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Así el único punto donde la torsión es cero es $P(0, 0, 1)$.

(b) Calculamos los vectores

$$r'(0) = (0, 2, 0), \quad r''(0) = (2, 0, -1), \quad r'''(0) = (0, 0, 0).$$

- Vector tangente

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$
$$\mathbf{T}(0) = (0, 1, 0).$$

- Vector binormal

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}$$
$$\mathbf{B}(0) = \frac{-1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2).$$

- Vector normal

$$\mathbf{N}(0) = \mathbf{B}(0) \times \mathbf{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, -1).$$

Distribución de puntaje.

(a)
- Indicar la condición sobre los vectores r, r' y r'', **1 punto**.
- Calcular correctamente el determinente, **1 punto**.
- Obtener $t = 0$ y el punto donde la torsión se nula, **1 punto**.

(b) Calcular los vectores tangente, binormal y normal, **1 punto** por cada vector. **3 puntos**.

2. (a) Reparametrice la curva $\mathbf{r}(t) = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^t \sin t, \mathrm{e}^t \cos t)$ con respecto a la longitud de arco medida desde el punto $(1, 0, 1)$ en la dirección que aumenta t.

   (b) Considere la curva **espiral logarítmica** γ descrita en coordinadas polares por la ecuación $r = \mathrm{e}^\theta$.
   Calcule el largo de la porción de la curva γ que corresponde a $\theta < 0$.

Solución.

(a) Consideramos la parametrización de la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^t \cos t, \mathrm{e}^t \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

que tiene derivada

$$\mathbf{r}'(t) = \mathrm{e}^t(1, \cos t - \sin t, \cos t + \sin t),$$

y tal que

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{3}\ \mathrm{e}^t.$$

Notamos que el punto $(1, 0, 1)$ de la curva corresponde a $t = 0$. Entonces una parametrización por longitud de arco se obtiene por

$$s(t) = \int_0^t \|\mathbf{r}'(\tau)\|\, \mathrm{d}\tau = \sqrt{3}(\mathrm{e}^t - 1).$$

Luego

$$t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right),$$

y así obtenemos el arcoparametrización

$$\mathbf{r}(s) = \left(\tfrac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\left(1, \cos(\ln(\tfrac{s}{\sqrt{3}} + 1)), \sin(\ln(\tfrac{s}{\sqrt{3}} + 1))\right).$$

(b) Como $x = r\cos\theta$ y $y = r\sin\theta$ entonces la curva está parametrizada por

$$\alpha(t) = (\mathrm{e}^t \cos t, \mathrm{e}^t \sin t), \quad t < 0.$$

Así

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}\ \mathrm{e}^t.$$

Luego el largo de la curva corresponde a

$$\int_\gamma \mathrm{d}s = \int_{-\infty}^0 \|\alpha'(t)\|\, \mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^t \mathrm{d}t = \sqrt{2}.$$

Distribución de puntaje.

(a)
- Calcular $r'(t)$, **0.5 punto**.
- Calcular $\|r'(t)\|$, **0.5 punto**.
- Expresar $s(t)$, **0.5 punto**.
- Calcular correctamente, $s(t)$, **1 punto**.
- Obtener la expresión de la arcoparametrización, **0.5 punto**.

(b)
- Expresar la parametrización, **1 punto**.
- Calcular $\alpha'(t)$ y $\|\alpha'(t)\|$, **1 punto** (**0.5 + 0.5**).
- Calcular el largo de la curva correctamente desde $-\infty$ hasta 0, **1 punto**.

3. (a) **Curva de Viviani**. Encuentre la parametrización de la curva que corresponde a la intersección de la semiesfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0$$

y del cilindro

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

(b) Una hélice tiene un radio de 10 cm y sube 20 cm en cada vuelta. En total ella gira 30 veces. Encuentre la parametrización natural.

Solución.

(a) La circunferencia base del cilindro se puede parametrizar por

$$x(t) = 1 + \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad z(t) = 0 \quad \text{para } t \in [0, 2\pi).$$

Sustituyendo en la ecuación de la esfera obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = 4 &\Leftrightarrow (1+\cos t)^2 + \sin^2 t + z^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow z^2 = 2 - 2\cos t \\ &\Leftrightarrow z^2 = 4\sin^2(\tfrac{t}{2}), \end{aligned}$$

y como $z \geq 0$ entonces $z = 2\sin(\frac{t}{2})$. Por lo tanto, una parametrización de la curva de Viviani es dada por

$$\gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t, \sin(\tfrac{t}{2})), \quad t \in [0, 2\pi).$$

(b) Una hélice se puede expresar por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt),$$

donde a es el radio del cilindro que la contiene. Sabemos que $a = 10$ y una vuelta se determine por el recorrido de t en el intrvalo $[0, 2\pi]$. Entonces

$$\mathbf{r}(0) = (a, 0, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{r}(2\pi) = (a, 0, 2b\pi),$$

y luego $b = \frac{10}{\pi}$. Como el hélice da en total 30 vueltas y cada vuelta corresponde a $[0, 2\pi]$ entonces 30 vueltas corresponden a $[0, 60\pi]$. Por lo tanto una parametrización será dada por

$$\mathbf{r}(t) = (10\cos t, 10\sin t, \tfrac{10t}{\pi}), \quad t \in [0, 60\pi].$$

Por longitud de arco, tenemos

$$s(t) = \int_0^t \|\mathbf{r}(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau = \frac{10\sqrt{\pi^2+1}}{\pi}\, t.$$

Entonces $t = \frac{\pi}{10\sqrt{\pi^2+1}}$ y una parametrización en término del parámetro natural s para $s \in [0, 600\sqrt{\pi^2+1}]$ es

$$\mathbf{r}(s) = \left(10\cos\frac{\pi s}{10\sqrt{\pi^2+1}}, 10\sin\frac{\pi s}{10\sqrt{\pi^2+1}}, \frac{\pi s}{\sqrt{\pi^2+1}}\right).$$

Distribución de puntaje.

(a)
- Parametrizar el cilindro, **1 punto**.
- Sustituir en la ecuación de la esfera y obtener la parametrización $z = 2\sin(\frac{t}{2})$ justificando que $z \geq 0$, **1 punto**. (restar 0.5 punto si no no hay justificación).
- Obtener la parametrización de la curva de Viviani, **1 punto**.

(b)
- Parametrización del hélice, **1 punto**.
- Encontrar los valores de a y b **1 punto**.
- Obtener la expresión de la parametrización y su intervalo, **1 punto**.

4. Sea Γ una curva que está contenida en una esfera de radio r. Demuestre que su curvatura κ satisface
$$\kappa(s) \geq \frac{1}{r}.$$

Solución 1. Supongamos que Γ está arcoparametrizada y está contenida en una esfera de centro en c y radio r. Entonces
$$\|\Gamma(s) - c\|^2 = r^2,$$
y derivando se obtiene
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\langle \Gamma(s) - c, \Gamma(s) - c\rangle = 0,$$
o sea
$$\langle \Gamma'(s), \Gamma(s) - c\rangle + \langle \Gamma(s) - c, \Gamma'(s)\rangle = 0.$$
Derivando de nuevo obtenemos
$$\langle \Gamma''(s), \Gamma(s) - c\rangle + \|\Gamma'(s)\|^2 = 0,$$
y como $\|\Gamma'(s)\| = \|\mathbf{T}(s)\| = 1$ donde $\mathbf{T}$ es el vector tangente unitario, entonces por la ecuación de Frenet
$$\Gamma''(s) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}(s)}{\mathrm{d}s} = \kappa(s)\mathbf{N}(s),$$
tal que $\mathbf{N}$ es el vector normal unitario, llegamos a
$$\langle \kappa(s)\mathbf{N}(s), \Gamma(s) - c\rangle + 1 = 0.$$
Luego $\kappa(s)\langle \mathbf{N}(s), \Gamma(s) - c\rangle = -1$. Por Cauchy-Schwarz,
$$|-1| = |\kappa\langle \mathbf{N}(s), \Gamma(s) - c\rangle| \leq |\kappa(s)|\,\|\mathbf{N}(s)\|\,\|\Gamma(s) - c\| = r\kappa(s).$$
Así $\kappa(s) \geq \frac{1}{r}$.

Distribución de puntaje.
- Describir la arcoparametrización de la esfera mediate la ecuación $\|\Gamma(s) - c\| = r$, **1 punto**.
- Derivar primera vez, **1 punto**.
- Derivar segunda vez, **1 punto**.
- Arguementar que $\Gamma''(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(\mathbf{s})$ por ecuación de Frenet, **1 punto**.
- Obtener la ecuación $\langle \kappa(s)\mathbf{N}(s), \Gamma(s) - c\rangle = -1$, **0.5 punto**.
- Usar Cauchy-Schwarz, **1 punto**.
- Deducir que $\kappa(s) \geq \frac{1}{r}$, **0.5 punto**.

Solución 2. Supongamos que Γ está arcoparametrizada y está contenida en una esfera de centro en c y radio r. Entonces

$$\|\Gamma(s) - c\|^2 = r^2,$$

y derivando se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\langle \Gamma(s) - c, \Gamma(s) - c\rangle = 0,$$

o sea

$$\langle \Gamma'(s), \Gamma(s) - c\rangle + \langle \Gamma(s) - c, \Gamma'(s)\rangle = 0,$$

y luego

$$\langle \Gamma'(s), \Gamma(s) - c\rangle = 0 \tag{1}$$

Derivando de nuevo obtenemos

$$\langle \Gamma''(s), \Gamma(s) - c\rangle + \|\Gamma'(s)\|^2 = 0,$$

y como $\|\Gamma'(s)\| = \|\mathbf{T}(s)\| = 1$ donde $\mathbf{T}$ es el vector tangente unitario, entonces por la ecuación de Frenet

$$\Gamma''(s) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}(s)}{\mathrm{d}s} = \kappa(s)\mathbf{N}(s),$$

tal que $\mathbf{N}$ es el vector normal unitario, llegamos a

$$\kappa(s)\langle \mathbf{N}(s), \Gamma(s) - c\rangle + 1 = 0.$$

Definimos $\rho(s) := \frac{1}{\kappa(s)}$. Entonces

$$\frac{1}{\rho(s)}\langle \mathbf{N}(s), \Gamma(s) - c\rangle + 1 = 0. \tag{2}$$

Una tercera derivación nos da

$$-\frac{\rho'(s)}{\rho^2(s)}\langle \Gamma(s) - c, \mathbf{N}(s)\rangle + \frac{1}{\rho(s)}\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s)\rangle + \frac{1}{\rho(s)}\langle \Gamma(s) - c, \mathbf{N}'(s)\rangle,$$

y por ortogonalidad de los vectores $\mathbf{N}$ y $\mathbf{T}$ y la ecuación de Frenet

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = -\kappa(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}(s),$$

tal que $\mathbf{B}$ es el vector binormal unitario, obtenemos

$$\frac{\rho'(s)}{\rho^2(s)}\langle \Gamma(s) - c, \mathbf{N}(s)\rangle + \frac{1}{\rho(s)}\langle \Gamma(s) - c, \kappa(s)\mathbf{T}(s) - \tau\mathbf{B}(s)\rangle = 0. \tag{3}$$

Notamos que de las ecuaciones (1) y (2), existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\Gamma(s) - c = -\rho(s)\mathbf{N}(s) + \alpha\mathbf{B}(s)$ donde α se puede determinar reemplazando en (3). De hecho

$$\frac{\rho'(s)}{\rho^2(s)}\langle -\rho(s)\mathbf{N}(s) + \alpha\mathbf{B}(s), \mathbf{N}(s)\rangle + \frac{1}{\rho(s)}\langle \rho(s)\mathbf{N}(s) + \alpha\mathbf{B}(s), \kappa(s)\mathbf{T}(s) - \tau\mathbf{B}(s)\rangle = 0,$$

y luego se obtiene $-\frac{\rho'(s)}{\rho^2(s)} - \alpha\frac{\tau(s)}{\rho(s)} = 0$ y $\alpha = -\frac{\rho'(s)}{\tau(s)}$. Así tenemos que

$$\Gamma(s) - c = -\rho(s)\mathbf{N}(s) - \frac{\rho'(s)}{\tau(s)}\mathbf{B}(s)$$

y en particular

$$\|\Gamma(s) - c\|^2 = \rho^2(s) + \frac{(\rho'(s))^2}{\tau^2(s)} = r^2,$$

implica que $\kappa(s) \geq \frac{1}{r}$ (como $\rho(s)^2 \leq r^2$).