Pontificia Universidad Católica de Chile – Facultad de Matemáticas

MAT1630 – Cálculo III – Interrogación 3

PAUTA DE SOLUCIONES

1. Calcular $\int_C f ds$, donde la función f está dada por $f(x,y,z) = x^2z + y^2z$ y C es la curva parametrizada por
$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t^3), \quad t \in [0, 5\pi].$$

Solución: Sabemos que
$$\int_C f ds = \int_0^{5\pi} f(\vec{r}(t))\|\vec{r}\,'(t)\|dt.$$
Calculamos:
$$\vec{r}\,'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 3t^2), \quad \|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{1+9t^4}.$$
Entonces,
$$\int_C f ds = \int_0^{5\pi} t^3\sqrt{1+9t^4}dt = \frac{1}{36}\int_1^{1+9(5\pi)^4} \sqrt{u}du = \frac{1}{54}\left[(1+9(5\pi)^4)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$
Total: 1 punto

2. Sea $\vec{F}(x,y,z) = (2xe^y, x^2e^y + \cos(z), -y\operatorname{sen}(z))$ un campo vectorial.
   (a) ¿Existen funciones f cuyo gradiente ∇f sea igual a este campo vectorial $\vec{F}$?. Justifique su respuesta. En caso positivo, encuentre todas las posibles funciones f.

Solución: Sabemos que $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ es el gradiente de una función f si y sólo si
$$P(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad R(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z}.$$
Así, si integramos P respecto a x, obtenemos que
$$f(x,y,z) = x^2ey + g(y,z).$$
Ahora si derivamos f con respecto a y y usamos que es igual a Q, obtenemos que
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \cos(z) \;\Rightarrow\; g(y,z) = y\cos(z) + h(z) \;\Rightarrow\; f(x,y,z) = x^2e^y + y\cos(z) + h(z).$$
Finalmente, al derivar f con respecto a z, obtenemos que $h(z) = C$, $C \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,
$$f(x,y,z) = x^2e^y + y\cos(z) + C,\ C \in \mathbb{R}$$
cumple que $\nabla f = \vec{F}$.

Total: 0.8 puntos

(b) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot dr$ si C está parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (e^t, t^2, t), \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

Solución: Usando el Teorema Fundamental del Cálculo para integrales de línea, obtenemos que

$$\int_C \vec{F} \cdot dr = \int_{-\pi}^{\pi} \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)dt = f(\vec{r}(\pi)) - f(\vec{r}(-\pi)) = e^{2\pi}e^{\pi^2} - e^{-2\pi}e^{\pi^2}.$$

Total: 0.7 puntos

3. Sea C la curva dada por $x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0$ orientada en sentido antihorario. Evaluar $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, si el campo vectorial $\vec{F}$ está dado por

$$\vec{F}(x, y) = \Big(\ln(1 + y), \frac{x(2 + y)}{1 + y} \Big).$$

Solución:

Sea C_1 la recta que une los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, parametrizada por

$$\vec{r}_1(t) = (2t - 1, 0)\ t \in [0, 1].$$

Entonces la curva $\tilde{C} = C \cup C_1$ es una curva cerrada, simple y orientada positivamente que encierra una región D. Usando Teorema de Green para el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, obtenemos que

$$\int_{\tilde{C}} \vec{F} \cdot dr = \int_{\tilde{C}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Tenemos que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, entonces

$$\int_C \vec{F} \cdot dr + \int_{C_1} \vec{F} \cdot dr = \int_{\tilde{C}} \vec{F} \cdot dr = \iint_D dA = Area(D).$$

Por un lado, tenemos que el área de D es $\frac{\pi}{2}$ (encierra la mitad de un círculo de radio 1). Por otro lado, tenemos que

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot dr = \int_0^1 \vec{F}(r_1\vec{(t)}) \cdot \vec{r_1}\,'(t)dt = \int_0^1 (\ln(1), 2(2t - 1)) \cdot (2, 0)dt = 0.$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$\int_C \vec{F} \cdot dr = Area(D) = \frac{\pi}{2}.$$

Total: 2 puntos

4. Considere la superficie S definida por

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

(a) Parametrice S usando $u = z$, $v = \theta$ de las coordenadas cilíndricas.

Solución: Las coordenadas cilíndricas están dadas por

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\,\text{sen}(\theta), \quad z = z.$$

Además, tenemos que x, y, z satisfacen $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, entonces $r = \sqrt{z^2+1}$. Por lo tanto,

$$x = \sqrt{z^2+1}\cos(\theta), \quad y = \sqrt{z^2+1}\,\text{sen}(\theta), \quad z = z, \quad 0 \leq z \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Luego, S puede ser parametrizada como $r(z,\theta) = (\sqrt{z^2+1}\cos(\theta), \sqrt{z^2+1}\,\text{sen}(\theta), z)$.

Total: 0.7 puntos

(b) Usando la parametrización anterior, evalúe $\iint_S f dS$ si f está dada por

$$f(x,y,z) = z.$$

Solución: Sabemos que

$$\iint_S f dS = \iint_D f(r(z,\theta))\|r_z \times r_\theta\| dA.$$

Calculamos

$$\begin{aligned} r_z &= \left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\cos(\theta), \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\,\text{sen}(\theta), 1\right) \\ r_\theta &= (-\sqrt{z^2+1}\,\text{sen}(\theta), \sqrt{z^2+1}\cos(\theta), 0) \\ r_z \times r_\theta &= (-\sqrt{z^2+1}\cos(\theta), -\sqrt{z^2+1}\,\text{sen}(\theta), z) \\ \|r_z \times r_\theta\| &= \sqrt{2z^2+1}. \end{aligned}$$

Así,

$$\iint_S f dS = \int_0^{2\pi}\int_0^2 z\sqrt{2z^2+1}\,dz\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\int_1^9 \sqrt{u}\,du = \frac{26\pi}{3}.$$

Total: 0.8 puntos