MAT–1630 - CALCULO III
INTERROGACIÓN 1
Desarrollo

1. Resuelva los siguientes problemas.

   a) Determine la ecuación del plano normal a la curva $\mathcal{C}$ parametrizada por

   $$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3,$$

   en el punto $P = (1, 1, 1)$.

   b) Determine la ecuación del plano osculador a la curva $\mathcal{C}$ parametrizada por

   $$\mathbf{r}(t) = (-\cos t, \operatorname{sen} t, -2t)$$

   en el punto $Q = (-1, 0, 0)$.

Solución: a) Notemos que la curva está definida por $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$. Por lo tanto, para $t = 1$, se obtiene que $\mathbf{r}(1) = (1, 1, 1) = P$. Calcula t **0.5 ptos**

Así

$$\mathbf{r}'(t) = (1, 2t, 3t^2) \quad \text{y} \quad \mathbf{r}'(1) = (1, 2, 3).$$ Calcula $r'(1)$ **1.0 ptos**

Luego la ecuación del plano normal a la curva en el punto $P(1, 1, 1)$ es

$$(x-1), y-1, z-1) \cdot r'(1) = 0 \Rightarrow (x-1)+2(y-1)+3(z-1) = 0,$$ Ecuación del plano **1.0 ptos**

o equivalentemente

$$x + 2y + 3z = 6.$$ Ecuación simplificada del plano **0.5 ptos**

b) Notemos que

$$\mathbf{r}'(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, -2) \quad \text{y} \quad r''(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 0).$$ Calcula r' y r'' **1.0 ptos**

Luego

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = (-2\operatorname{sen} t, -2, \cos t, -1).$$ Calcula producto cruz **0.5 ptos**

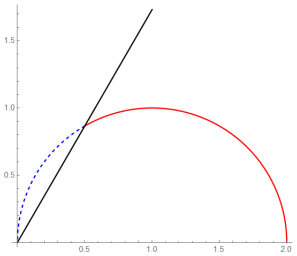
Así $\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0) = (0, -2, -1)$. Explicita vector normal en $t = 0$ **0.5 ptos**

Como $\mathbf{r}(0) = Q = (-1, 0, 0)$ tenemos que la ecuación del plano osculador es

$$(0, -2, -1) \cdot (x + 1, y, z) = 0,$$ Escribe ecuación plano **0.5 ptos**

o equivalentemente

$$2y + z = 0.$$ Simplifica ecuación plano **0.5 ptos**



2. Considere la curva cuya ecuación en coordenadas polares es:

$$r = 2\cos\theta \qquad -\pi/2 < \theta < \pi/2\,.$$

Calcule la longitud del arco comprendido entre el eje horizontal y la recta de ecuación $y = \sqrt{3}\,x$ (en coordenadas Cartesianas).

Solución: El punto P sobre la curva con coordenadas polares (r, θ) tiene coordenadas Cartesianas

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$ Escribe coordenada cartesiana de P **0.5 ptos**

La curva intersecta el eje horizontal cuando $\theta = 0$. Explicita corte con OX **0.5 ptos**

En el punto de intersección con la recta $y = \sqrt{3}\,x$ se tiene que

$$r\,\mathrm{sen}\,\theta = y = \sqrt{3}\,x = \sqrt{3}\,r\cos\theta,$$

de modo que $\mathrm{sen}\,\theta = \sqrt{3}\cos\theta$. Plantea ecuación **0.5 ptos**

Como solo se están considerando valores del parámetro θ entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, en el punto de intersección se tiene que $\theta = \pi/3$. Encuentra θ **1.0 ptos**

Se concluye que la longitud pedida es

$$L(\text{arco}) = \int_0^{\pi/3} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + r^2}\,\mathrm{d}\,\theta$$ Plantea la integral θ **1.5 ptos**

Calculando,

$$\int_0^{\pi/3} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + r^2}\,\mathrm{d}\,\theta = \int_0^{\pi/3} 2\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{3}.$$ Calcula la integral θ **2.0 ptos**

Si se calcula la longitud del arco punteado, $\pi - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$ también esta respuesta se considera correcta.

3. Considere $\mathbf{r}(t) = (1+t, 1-t, t^n)$ una parametrización de una curva $\mathcal{C}$.

   (a) Para $n = 1$ parametrice la curva $\mathcal{C}$ por longitud de arco $\mathbf{r}(s)$ con $s = 0$ para $t = 0$.

   (b) Si $n = 2$ demuestre que la curva es plana y calcule la ecuación cartesiana del plano que la contiene.

   (c) Si $n = 3$ calcule la curvatura en t y calcule la binormal $\mathbf{B}(t)$ para $t \neq 0$.

Solución (a) Para $n = 1$, $\mathbf{r}'(t) = (1, -1, 1)$. Luego, $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{3}$. Calcula $|\mathbf{r}'(t)|$ **0.5 ptos**

Entonces

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{3}\, d\tau = \sqrt{3}\, t \Rightarrow t = \frac{s}{\sqrt{3}}\,.$$ Calcula s **0.5 ptos**

Por lo tanto, la parametrización por longitud de arco pedida es

$$\vec{r}(s) = \left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}, 1 - \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}}\right)\,.$$ Explicita $r(s)$ **1.0 ptos**

Solución (b) Para $n = 2$,

$$\mathbf{r}(t) = (1+t, 1-t, t^2) \quad , \quad \mathbf{r}'(t) = (1, -1, 2t)\,,$$
$$\mathbf{r}''(t) = (0, 0, 2) \quad , \quad \left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|^3 = (2 + 4t^2)^{3/2}\,.$$

Además $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = -2\hat{i} - 2\hat{j}$. Luego,

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}\, \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \frac{-i}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}}$$

Como $\mathbf{B}$ es constante, la curva se encuentra en un plano cuya normal es $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$.

Mostrar que B es constante **1.0 ptos**

Además el plano contiene a $\mathbf{r}(0) = (1, 1, 0)$. Luego la ecuación cartesiana del plano que contiene a la curva es

$-(x-1)-(y-1) = 0$ equivalentemente $x+y-2 = 0$. Determina ecuación plano **1.0 ptos**

Solución (c) Para $n = 3$

$$\mathbf{r}(t) = (1+t, 1-t, t^3) \quad , \quad \mathbf{r}'(t) = (1, -1, 3t^2)\,,$$
$$\mathbf{r}''(t) = (0, 0, 6t) \quad , \quad |\mathbf{r}'(t)|^3 = (2 + 9t^4)^{1/2}\,.$$

Luego, la curvatura κ es

$$\kappa(t) = \frac{6|t|\sqrt{2}}{(\sqrt{2 + 9t^4})^3}$$ Calcula κ **1.0 ptos**

Para $t \neq 0$ se tiene que

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) & \text{si } t > 0 \quad \textbf{0.5 ptos} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) & \text{si } t < 0 \quad \textbf{0.5 ptos} \end{cases}$$

4. Sean $\mathbf{r}(t)$ la parametrización de una curva Γ en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{r}(s)$ una parametrización por longitud de arco de Γ.

   a) Demuestre que $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^2} = \kappa\mathbf{N}$, donde κ es la curvatura y $\mathbf{N}$ la normal unitaria.

   b) $\mathbf{B}$ binormal. Usando la fórmula de la parte a), aunque no haya podido demostrarla, pruebe que

$$\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^3}\cdot\mathbf{B} = \kappa\,\tau\,, \quad \text{donde } \tau \text{ es la torsión y } \cdot \text{ representa el producto punto.}$$

Solución (a)

Por definición de parámetro s de longitud de arco:

$$s(t) = \int_0^t \|\mathbf{r}(\tau)\|\,d\tau \Longrightarrow \frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|\,. \qquad \boxed{\textbf{0.5 ptos}}$$

Usando la regla de la cadena vemos que

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}. \qquad \boxed{\textbf{1.0 ptos}}$$

En consecuencia,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \mathbf{T}. \qquad \boxed{\textbf{1.0 ptos}}$$

A partir de esto se obtiene el resultado pedido usando la fórmula que define la curvatura

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa\mathbf{N}. \qquad \boxed{\textbf{0.5 ptos}}$$

Solución (b)

Derivando la fórmula de la parte a) con respecto a s obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^3} = \frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}\,\mathbf{N} + \kappa\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \qquad \boxed{\textbf{1.0 ptos}}$$

Aplicando la fórmula de Frenet -Serret se obtiene que

$$\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^3} = \frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}\,\mathbf{N} + \kappa\big(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\big)\,. \qquad \boxed{\textbf{1.0 ptos}}$$

Puesto que $\mathbf{T}\cdot\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{N}\cdot\mathbf{B} = 0$ y $\|\mathbf{B}\| = 1$ $\boxed{\textbf{0.5 ptos}}$

Finalmente se obtiene que

$$\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^3}\cdot\mathbf{B} = \kappa\,\tau\|\mathbf{B}\|^2 = \kappa\,\tau\,. \qquad \boxed{\textbf{0.5 ptos}}$$