

Superficies Paramétricas

Cálculo III - MAT1630

Rodrigo Vargas

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile

17 de enero de 2023

Superficies Paramétricas

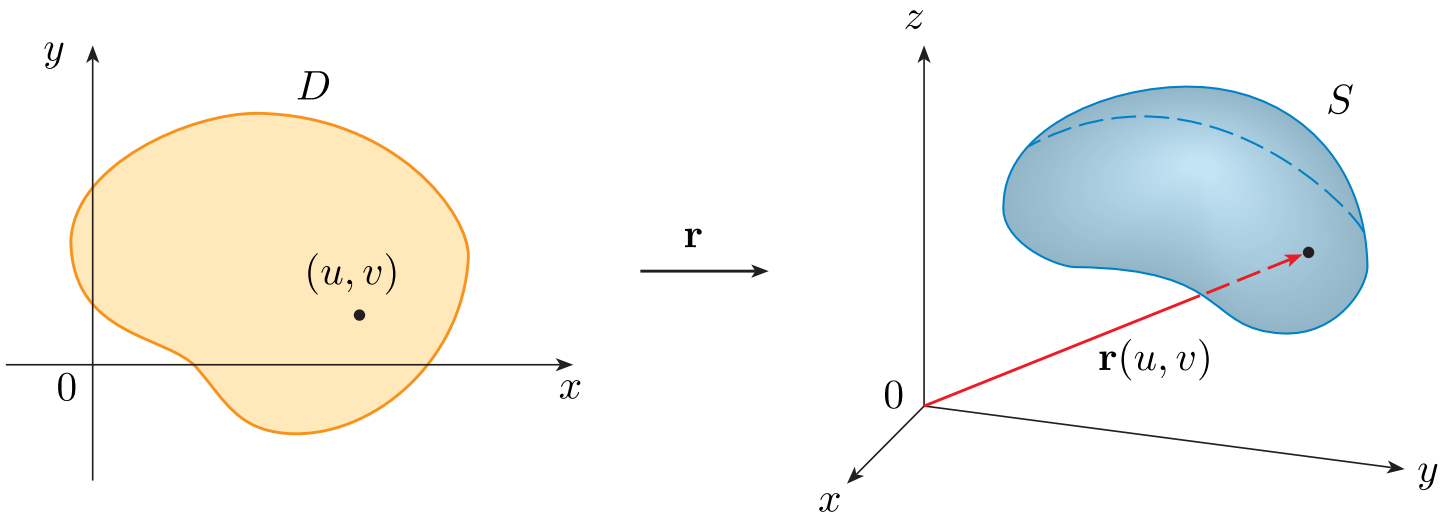
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Definición.

Una parametrización de una superficie S es una función $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

donde $x, y, z : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son diferenciables, cuya imagen es S, es decir $\mathbf{r}(D) = S$.



Superficies Paramétricas

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

EJEMPLO 1 Determine una parametrización para la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Solución Basta considerar las coordenadas esféricas

$$x = a\sin\phi\cos\theta\,, \quad y = a\sin\phi\sin\theta\,, \quad z = a\cos\phi$$

Podemos considerar la paramatrización $\mathbf{r} : [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = (a\sin\phi\cos\theta, a\sin\phi\sin\theta, a\cos\phi)$$

cuyas funciones coordenadas satisfacen $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Superficies Paramétricas

EJEMPLO 2 Encuentre una parametrización para el cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

Solución Las ecuaciones paramétricas del cilindro son

$$x = 2\cos(\theta)\,, \quad y = 2\sin(\theta)\,, \quad z = z$$

donde $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ y $z \in \mathbb{R}$.

EJEMPLO 3 Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces la gráfica $z = f(x, y)$ es una superficie cuya parametrización es $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))\,.$$

Superficies Paramétricas

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

EJEMPLO 4 Encuentre la parametrización de un plano que pasa por el punto P_0 y que está generado por los vectores no paralelos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

Solución Si P es cualquier punto en el plano, entonces

$$r(u, v) = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = P_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

es una parametrización para el plano con $u, v \in \mathbb{R}$.

Superficies Paramétricas

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Superficies de revolución

Una superficie de revolución es la superficie obtenida al girar una curva plana, llamada curva de perfil, alrededor de una línea recta en el plano. Consideremos el eje de rotación como el eje z y el plano como el plano xz. Cualquier punto p de la superficie se obtiene girando algún punto q de la curva del perfil un ángulo v (digamos) alrededor del eje z. Si

$$\gamma(u) = (f(u), 0, g(u)), \quad u \in [a, b]$$

es una parametrización de la curva de perfil que contiene q, p es de la forma

$$\mathbf{r}(u, v) = (f(u)\cos(v), f(u)\sin(v), g(u)).$$

con $a \leqslant u \leqslant b$ y $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$.

Superficies Paramétricas

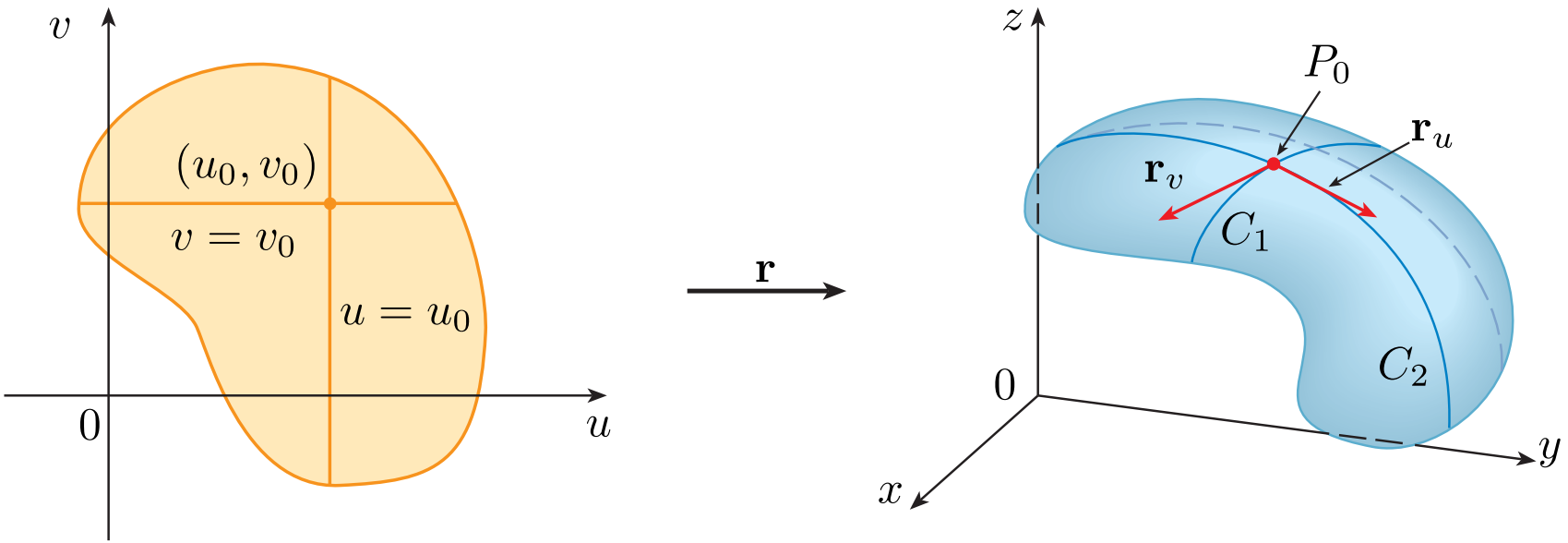
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

EJEMPLO 5 Encuentre una parametrización para el toro que se obtiene al rotar un circulo de centro $(a, 0)$ y radio r (con $a - r > 0$) en el plano XZ entorno al eje Z.

Superficies Paramétricas

Sea S una superficie parametrizada por $\mathbf{r}(u, v)$. Si mantiene u constante haciendo $u = u_0$ entonces $\mathbf{r}(u_0, v)$ se transforma en una curva C_1 de parámetro v. El vector tangente a C_1 en el punto $P_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ está determinado por la derivada parcial de $\mathbf{r}$ con respecto a v:

$$\mathbf{r}_v(u_0, v_0) = (x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0), z_u(u_0, v_0)) .$$



Superficies Paramétricas

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Definición.

Diremos que la superficie parametrizada es regular si

$$\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \neq 0\,.$$

En este caso el vector normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ es un vector normal al plano tangente.

Superficies Paramétricas

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Definición.

Sea S una superficie regular parametrizada por $\mathbf{r}(u, v)$ con $(u, v) \in D$ de tal manera que S es cubierta sólo una vez cuando (u, v) varía en todo el dominio del parámetro D.
Entonces el área de la superficie S es

$$A(S) = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dA \, .$$

EJEMPLO 6 Determine el área de la parte del paraboloide $z = y^2 - x^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Superficies Paramétricas

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

EJEMPLO 7 Determine el área de la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se ubica bajo el plano $z = 9$.