PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Primer Semestre de 2012

MAT1630 - Cálculo III
Interrogación 2 - Miércoles 2 de mayo

1. (a) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tres veces diferenciable. Sean $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ tales que $\nabla f(x_0) = 0$, $H_f(x_0) = 0$ y para todo $a \in B_r(x_0)$ y $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $\sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a) v_i v_j v_k \geq 0$. Demuestre que x_0 es un mínimo local.

   (b) Demuestre que la función $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ es localmente invertible en una vecindad de cada punto, pero no lo es globalmente.

Solución 1.a). El Teorema de Taylor de orden 2 asegura que,

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} h \cdot H_f(x_0) h + \text{ error},$$

donde $h = x - x_0$.

Además, el error es precisamente,

$$\frac{1}{6} \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a) h_i h_j h_k,$$

para algún a cerca de x_0. Como este último es no negativo, y como los términos que contienen al gradiente y al Hessiano se anulan, concluímos que,

$$f(x) \geq f(x_0),$$

es decir, x_0 es un mínimo local. □

Solución 1.b). El Jacobiano de la función es e^x, que nunca se anula.

Por lo tanto, por el Teorema de la Función Inversa, $f(x, y)$ es invertible en una vecindad de cada punto (x_0, y_0) (esto es, es localmente invertible).

Sin embargo, no es globalmente invertible, por ejemplo $f(0, 0) = f(0, 2\pi)$, lo que muestra que esta función no es inyectiva.

□

2. Considere la función $f(x,y,z) = x^3 + x^2 - 3y^2 + y^3 - z^2$ en el dominio

$$A = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Estudie los puntos críticos de $f(x,y,z)$ en el interior de A y encuentre los máximos y mínimos en todo A.

Solución 2). El gradiente de la función es,

$$(3x^2 + 2x, -6y + 3y^2, -2z).$$

Los puntos críticos (interiores) son entonces $x_0 = (0,0,0)$ y $x_1 = (-\frac{2}{3}, 0, 0)$.

Por otra parte, el Hessiano es la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 6x+2 & -0 & 0 \\ 0 & -6+6y & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Claramente, el Hessiano en x_0 no es ni positivo ni negativo definido, y no podemos concluir sobre este punto. De hecho, no es ni máximo no mínimo, pues hay puntos tan cercanos al origen como se quiera, donde la funcíon es positiva y otros donde es negativa. Además, en x_1 el Hessiano es negativo definido y x_1 es máximo.

Para estudiar lo que pasa en la frontera, usamos multiplicadores de Lagrange:

$$F(x,y,z) = x^3 + x^2 - 3y^2 + y^3 - z^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

El gradiente de F igual a 0 y la condición entrega cuatro ecuaciones:,

$$3x^2 + 2x - 2\lambda x = 0$$

$$-6y + 3y^2 - 2\lambda y = 0$$

$$-2z - 2\lambda z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Las soluciones para (x,y,z,λ) son: $(0,1,0,1)$, $(0,-1,0,3)$, $(1,0,0,\frac{5}{2})$ y $(-1,0,0,\frac{-1}{2})$ (para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, las soluciones son complejas).

Sabemos entonces que los extremos en la frontera se encuentran entre los puntos $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$, $(1,0,0)$ y $(-1,0,0)$. Evaluando la función $f(x,y,z)$ en estos cuatro puntos, obtenemos que en la frontera el máximo es $(1,0,0)$ y el mínimo $(0,-1,0)$.

Finalmente, en el interior no hay mínimo local y el maxímo local es $(-\frac{2}{3},0,0)$. Como $f(-\frac{2}{3},0,0) = \frac{2}{27}$, el máximo global es $(1,0,0)$ y el mínimo global $(0,-1,0)$. □

3. Demuestre que existen funciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, definidas cerca de $(u_0, v_0) = (1, 0)$, que satifacen las ecuaciones,

$$\begin{cases} xu + y^2(e^v - 1) = 2 \\ 4xv + x^2 + uy^2 = 5 \end{cases}$$

y que cumplen $x(1, 0) = 2$ e $y(1, 0) = 1$. Calcule además $\frac{\partial x}{\partial v}(1, 0)$.

Solución 3). Se tiene que $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (2, 1, 1, 0)$ satisface el sistema.

Además, con,

$$F(x, y, u, v) = xu + y^2(e^v - 1) - 2$$

y

$$G(x, y, u, v) = 4xv + x^2 + uy^2 - 5 \ ,$$

se tiene que el jacobiano,

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}(2, 1, 1, 0) = 1.$$

Por el Teorema de la Función Implícita, concluímos que existen funciones $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$, tales que $x(1, 0) = 2$, $y(1, 0) = 1$ y

$$\begin{cases} xu(x, y) + y^2(e^{v(x,y)} - 1) = 2 \\ 4xv(x, y) + x^2 + u(x, y)y^2 = 5 \end{cases}$$

Derivando implícitamente estas dos ecuaciones con respecto a v y evaluando en el punto $(2, 1, 1, 0)$, se obtiene un sistema lineal para $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, en ese punto, de donde $\frac{\partial x}{\partial v}(1, 0) = -2$. También se puede calcular esta cantidad usando la fórmula con jacobianos. □

4. Definimos la masa de un sólido $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, de densidad $\rho : \Omega \to (0, \infty)$, como,

$$M = \int\int\int_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Calcule la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$, si su densidad es $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solución 4). Usamos coordenadas cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = z$, que tienen jacobiano r. También la densidad dada en estas coordenadas es $\rho = r$.

Las superficies consideradas se expresan como $r = 2\cos\theta$ y $z = r$.

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^r r r dz dr d\theta$$

Después de calcular las integrales con respecto a z y a r, se obtiene que,

$$M = 8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta$$

Usando que,

$$\cos^4 \theta = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2}),$$

se calcula la integral en θ, resultando, $M = 3\pi$. □