PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TAV 2020

MAT1630 - Control 4

NOMBRE:.....

Sean P y Q las funciones dadas por

$$P(x,y) := \frac{-y \cdot \text{Arctan}(y/x)}{x^2+y^2}, \quad Q(x,y) := \frac{x \cdot \text{Arctan}(y/x)}{x^2+y^2}, \quad x \neq 0,$$

siendo $\text{Arctan} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ la rama principal de la arcotangente.

Sean C_1 y C_2 las semicircunferencias

$$C_1 : \ x^2+y^2=1, \ x>0; \qquad C_2 : \ x^2+y^2=1, \ x<0$$

ambas recorridas en el sentido antihorario. Calcule

$$\int_{C_1} P\,dx + Q\,dy \qquad \text{y} \qquad \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy.$$

- La curva C_1 puede parametrizarse como

$$x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \text{sen}(t), \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

  En esa parametrización se tiene que

$$\text{Arctan}\Big(\frac{y(t)}{x(t)}\Big) = \text{Arctan}\Big(\tan(t)\Big) = t,$$

  luego

$$\int_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-t\,\text{sen}\,t)x'(t) + (t\cos t)y'(t)\,dt = 0.$$

- La curva C_2 puede parametrizarse como

$$x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \text{sen}(t), \quad \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}.$$

Al igual que antes, se tiene que

$$\operatorname{Arctan}\Big(\frac{y(t)}{x(t)}\Big) = \operatorname{Arctan}\Big(\tan(t)\Big),$$

salvo que ahora esa expresión tiende a valer $-\frac{\pi}{2}$ cuando t tiende a $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ cuando t tiende a $\frac{3\pi}{2}$. Se concluye que

$$\operatorname{Arctan}\Big(\frac{y(t)}{x(t)}\Big) = t - \pi, \quad \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\int_{C_1} P\,dx + Q\,dy &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-(t-\pi)\operatorname{sen}(t))x'(t) + ((t-\pi)\cos(t))y'(t)\,dt \\ &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (t-\pi)\,dt = \frac{(t-\pi)^2}{2}\bigg|_{t=\pi/2}^{3\pi/2} = 0\end{aligned}$$