PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE MAT1630
FACULTAD DE MATEMATICAS Examen-1er. Semestre

Examen de Cálculo III

1. (a) Determine los valores extremos de $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x + y^2$ sujeto a la condición $x^2 + y^2 = 1$.

Solución: Para analizar la función f en el círculo unidad $x^2 + y^2 = 1$ aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange, resolviendo el sistema dado por

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

y la restricción $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$. Las dos primeras ecuaciones son

$$x^2 - \frac{1}{4} = 2\lambda x$$
$$2y = 2\lambda y$$

La segunda ecuación implica que $(1-\lambda)y = 0$, por lo que $\lambda = 1$ o bien $y = 0$.
Si $\lambda = 1$, usando la primera ecuación, tenemos que $x^2 - 2x - \frac{1}{4} = 0$, luego

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+1}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Usando la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, tenemos

$$x = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 1 - (1 - \frac{\sqrt{5}}{2})^2 = \sqrt{5} - \frac{5}{4} > 0$$

$$x = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 1 - (1 + \frac{\sqrt{5}}{2})^2 = -\sqrt{5} - \frac{5}{4} < 0$$

Dado que la segunda desigualdad $y^2 < 0$ es imposible, el único valor de x es el primero. Así obtenemos los puntos

$$P_1 = (1 - \frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{(\sqrt{5} - \frac{5}{4})}), \quad \text{y } P_2 = (1 - \frac{\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{(\sqrt{5} - \frac{5}{4})}).$$

Si $y = 0$, entonces la ecuación de la restricción implica que $x^2 = 1$, lo que proporciona dos nuevos puntos:

$$P_3 = (1, -0) \quad \text{y } P_4 = (-1, 0).$$

Los valores de la función f en dichos puntos son

$$f(P_1) = f(P_2) = \frac{1 + 5\sqrt{5}}{12} \simeq 1{,}01503, \quad f(P_3) = \frac{1}{12},\ f(P_4) = -\frac{1}{12}$$

luego el máximo absoluto de f se alcanza en P_1 y P_2, mientras que el mínimo absoluto de f se alcanza en P_4.

(b) Encuentre los puntos de la superficie $z - 4x^2 - y^2 + 2 = 0$ más cercanos al origen.

Solución: Reformulamos el problema como el problema de encontrar los puntos mínimos de $f(x, y, z) = ||(x, y, z) - (0, 0, 0)||^2 = x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a la condición $g(x, y, z) = z - 4x^2 - y^2 + 2 = 0$.
Aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange. Se tiene que resolver el sistema dado por $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \wedge g(x, y, z) = 0$,

$$2x = -8\lambda x, \quad 2y = -2\lambda y, \quad 2z = \lambda,$$

y la restricción

$$z = 4x^2 + y^2 - 2$$

Es decir:

$$(1 + 4\lambda)x = 0, \quad (1 + \lambda)y = 0, \quad z = \lambda/2, \quad z = 4x^2 + y^2 - 2$$

Hay tres posibilidades: (i) $x = y = 0$, (ii) $x \neq 0$, (iii) $y \neq 0$.
El caso (i) corresponde al punto $P_1 := (0, 0, -2)$ (con $\lambda = -4$).

En el caso (ii) se tiene $x \neq 0 \Rightarrow 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1/4 \overset{(1+\lambda)y=0}{\Rightarrow} y = 0$. Tambien $z = \lambda/2 = -1/8$. Con la restricción $g(x, y, z) =$ obtenemos $4x^2 = 2 - 1/8 = 15/8$, así obtenemos los puntos

$$P_2 = (\sqrt{15/32}, 0, -1/8), \quad P_3 = (-\sqrt{15/32}, 0, -1/8)$$

En el caso (iii) se tiene $y \neq 0 \Rightarrow \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \overset{(1+4\lambda)x=0}{\Rightarrow} x = 0$. Tambien $z = \lambda/2 = -1/2$. Con la restricción $g(x, y, z) =$ obtenemos $y^2 = 2 - 1/2 = 3/2$, así obtenemos los puntos

$$P_4 = (0, \sqrt{3/2}, -1/2), \quad P_5 = (0, -\sqrt{3/2}, -1/2),$$

Los valores de la función f en dichos puntos son

$$f(P_1) = 4, \quad f(P_2) = f(P_3) = \frac{31}{64}, \quad f(P_4) = f(P_5) = \frac{7}{4}$$

luego P_2 y P_3 son los puntos de la superficie $z - 4x^2 - y^2 + 2 = 0$ más cercanos al origen.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(y-2)}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,2) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,2). \end{cases}$$

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en todo punto de $\mathbb{R}^2$ y pruebe que f es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

Solución: Usando las reglas del producto y cuociente para derivar se tiene que en todo punto distinto de $(0,2)$ f tiene ambas derivadas parciales y

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(2x(y-2)^2 + x^3)(y-2)}{(x^2+(y-2)^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^4}{(x^2+(y-2)^2)^{3/2}}.$$

Calculamos ahora las derivadas parciales en $(0,2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,2) - f(0,2)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = \lim_{y\to 2} \frac{f(0,y) - f(0,2)}{y-2} = \lim_{y\to 2} \frac{0}{y-2} = 0.$$

Las derivadas parciales calculadas anteriormente son continuas en cualquier punto $(x,y) \neq (0,2)$, luego f es diferenciable en esos puntos.

Veamos ahora la diferenciabilidad en $(0,2)$: Debemos ver si

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{f(x,y) - f(0,2) - 0\cdot x - 0\cdot(y-2)}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}} = 0.$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{f(x,y) - f(0,2) - 0\cdot x - 0\cdot(y-2)}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\frac{x^2(y-2)}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}}}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{x^2(y-2)}{(x^2+(y-2)^2)}. \end{aligned}$$

Este último límite vale 0 por el Teorema del Sandwich:

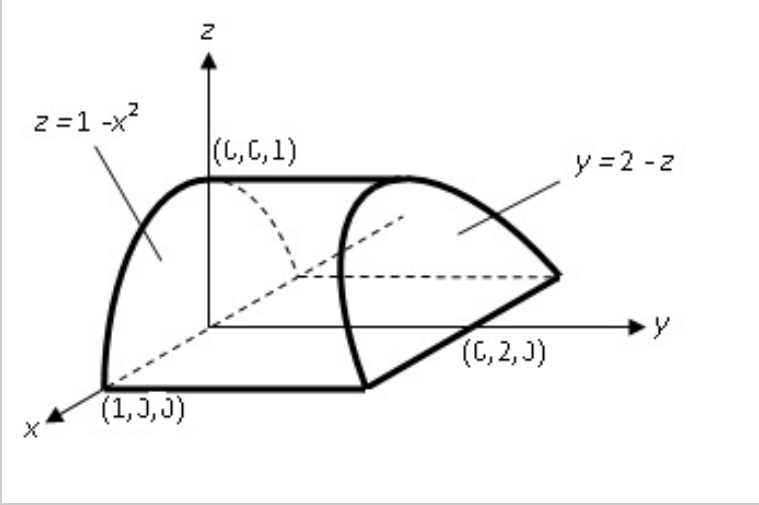
$$0 \leq \left| \frac{x^2(y-2)}{(x^2+(y-2)^2)} \right| \leq |x|.$$

Luego f es diferenciable en $(0,2)$.

3. Evaluar el flujo $\iint_S \vec{F} \cdot dS$ siendo $\vec{F}$ campo vectorial dado por

$\vec{F}(x,y,z) = (xy, y^2 + e^{xz^2}, \text{sen}(xy))$, y siendo S la superficie frontera de la región W acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0,\ y = 0,\ y + z = 2$.

Solución:



El problema invita a la transformación de la integral de flujo en algún otro tipo de integral para evitar las complejidades que surgirían de parametrizar el segundo término de la segunda componente del campo vectorial, y también para hacer una sola integral en vez de cuatro.

Para aplicar el teorema de la divergencia calculamos:

$div\vec{F} = y + 2y = 3y$

Evaluaremos la integral de volumen de esta función escalar tomando el dominio como una región de tipo 3; esto es, una región encerrada entre dos funciones de un dominio

bidimensional ubicado sobre el plano xz.

$$\iint_S \vec{F}\cdot dS = \iiint_W div\vec{F}dV = \iiint_W 3ydV = 3\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{0}^{2-z} y\ dy\ dz\ dx = \frac{184}{35}.$$

4. Calcular el flujo $\iint_S \vec{F}\cdot dS$ del campo $\vec{F}(x,y,z) = (0, e^{\operatorname{sen} xz} + \tan z, y^2)$ a través de la superficie S definida por el semi-elipsoide superior $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$, $z \geq 0$ con su normal apuntando hacia arriba.

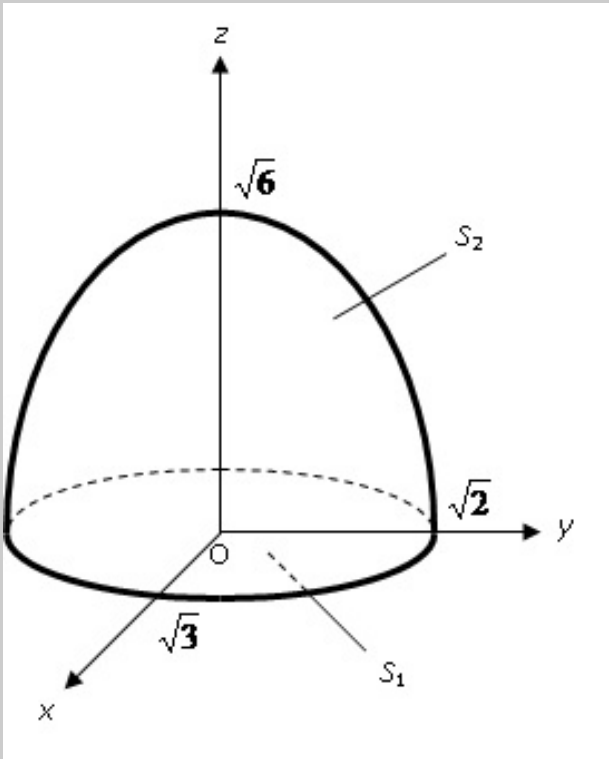
   Indicación: Puede usar que $\int \cos^4 t dt = \frac{1}{4}\cos^3 t \operatorname{sen} t + \frac{3}{8}\operatorname{sen} t \cos t + \frac{3}{8}t$.

   Debido a un error tipográfico, la solución de este problema tal como está planteado tiene una dificultad que no fue intención de los profesores poner y por lo tanto será evaluado como si el campo no hubiera tenido una singularidad. Las personas que se dieron cuenta de esta dificultad, viéndose este hecho reflejado en lo que escribieron, serán evaluados con nota máxima. La solución aceptada se encuentra más abajo. El error tipográfico consiste en que el campo debió haber sido $\vec{F}(x,y,z) = (0, e^{\operatorname{sen} xz} + \tan(z/3), y^2)$, de manera que ni la superficie ni la región W definida abajo contienen puntos con $z = \pi/2$ (donde $\tan z$ tiene una singularidad). Una vez dicho esto, la solución que esperábamos es como sigue.

Solución:

Si observamos que $div\vec{F} = 0$, y llamamos (ver figura) $S = S_1 \cup S_2$ y W la región encerrada por S, podemos plantear:

$$0 = \iiint_W div\vec{F}dV = \iint_{S_1} \vec{F}\cdot dS + \iint_{S_2} \vec{F}\cdot dS.$$



Luego, como en S_1 $z = 0$, $2x^2 + 3y^2 = 6$, y la normal adecuada es $-\hat{k}$, se tiene

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot dS = -\iint_{S_1} \vec{F} \cdot dS = -\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{2-(2/3)x^2}}^{\sqrt{2-(2/3)x^2}} (0,0,y^2) \cdot (0,0,-1) dy\, dx$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{2-(2/3)x^2}}^{\sqrt{2-(2/3)x^2}} y^2 dy\, dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{y^3}{3} \Big|_{-\sqrt{2-(2/3)x^2}}^{\sqrt{2-(2/3)x^2}} dx$$

$$= \frac{2}{3} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (2 - (2/3)x^2)^{3/2} dx = \ldots\ldots = \sqrt{\frac{3}{2}}\pi.$$

Solución alternativa aceptada: Haciendo un corte en el elipsoide, y poniendo que

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot dS = \lim_{\varepsilon,\mu \to 0} \left(\iint_{S_2^\varepsilon} \vec{F} \cdot dS + \iint_{S_2^\mu} \vec{F} \cdot dS \right)$$

donde S_2^ε es la superficie del elipsoide con $\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq z \leq \sqrt{6}$ y S_2^μ es la superficie del elipsoide con $0 \leq z \leq \frac{\pi}{2} - \mu$. A cada una de estas superficies se le agregan las "tapas" correspondientes y se aplica el Teorema de la Divergencia:

$$0 = \iiint_{W_1} div\vec{F} dV = \iint_{S_1^\varepsilon} \vec{F} \cdot dS + \iint_{S_2^\varepsilon} \vec{F} \cdot dS.$$

$$0 = \iiint_{W_2} div\vec{F} dV = \iint_{S_1^\mu} \vec{F} \cdot dS + \iint_{S_2^\mu} \vec{F} \cdot dS + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot dS.$$

y por lo tanto,

$$\iint_{S_2^\varepsilon} \vec{F} \cdot dS + \iint_{S_2^\mu} \vec{F} \cdot dS = -\iint_{S_1^\varepsilon} \vec{F} \cdot dS - \iint_{S_1^\mu} \vec{F} \cdot dS - \iint_{S_1} \vec{F} \cdot dS,$$

siendo S_1^ε la tapa elíptica correspondiente a $z = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, S_1^μ la tapa elíptica correspondiente a $z = \frac{\pi}{2} - \mu$ y S_1 la tapa elíptica correspondiente a $z = 0$.

Como la normal a la tapa S_1^ε correspondiente a $z = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ es $(0, 0, -1)$ y la normal a la tapa S_1^μ correspondiente a $z = \frac{\pi}{2} - \mu$ es $(0, 0, 1)$, estas integrales se cancelan en el límite, obteniéndose que

$$\lim_{\varepsilon, \mu \to 0} \left(\iint_{S_2^\varepsilon} \vec{F} \cdot dS + \iint_{S_2^\mu} \vec{F} \cdot dS \right) = -\iint_{S_1} \vec{F} \cdot dS.$$

Tiempo: 2,5 horas.
Sin consultas
Sin calculadora ni celulares