Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Daniel Gajardo.
Ayudante: Camila Pérez

Cálculo III - MAT1630

Interrogación 1 - Solución

1. Considere la curva parametrizada

$$x(t) = \cos(t)\text{sen}(t), \quad y(t) = \cos(t), \quad 0 \leq t < 2\pi$$

(a) Demuestre que la curva posee dos rectas tangentes en el origen y encuentre las ecuaciones de tales rectas.

Solución. La curva pasa por el origen cuando $(\cos(t)\text{sen}(t), \cos(t)) = (0, 0)$. Esto ocurre cuando $\cos(t) = 0$, es decir, $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.
Por otro lado,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-\text{sen}(t)}{-\text{sen}^2(t) + \cos^2(t)}.$$

De donde $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1$ y $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}} = -1$. Las rectas tangentes, por tanto, son

$$y = x \quad \text{y} \quad y = -x$$

□

(b) Determine los puntos de la curva donde la recta tangente es vertical y horizontal.

Solución. La recta horizontal puede darse cuando $x'(t) = 0$, es decir, cuando $\cos(t) = \pm\text{sen}(t)$. Esto ocurre cuando $t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. Como para todos esos valores de t se tiene que $y'(t) \neq 0$ entonces determinan puntos donde la recta es vertical. Los puntos son:

$$t = \frac{\pi}{4} \implies (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$t = \frac{3\pi}{4} \implies (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$t = \frac{5\pi}{4} \implies (x, y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$t = \frac{7\pi}{4} \implies (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

La recta puede ser horizontal cuando $y'(t) = 0$, es decir, cuando $-\text{sen}(t) = 0$. Esto ocurre cuando $t = 0$ y $t = \pi$. En ninguno de estos puntos se tiene que $x'(t) = 0$, por lo que efectivamente determinan rectas horizontales. Los puntos son:

$$t = 0 \implies (x, y) = (0, 1)$$
$$t = \pi \implies (x, y) = (0, -1)$$

□

(c) Calcule el signo de $\dfrac{dy}{dx}$ en cada instante t donde esté definido.

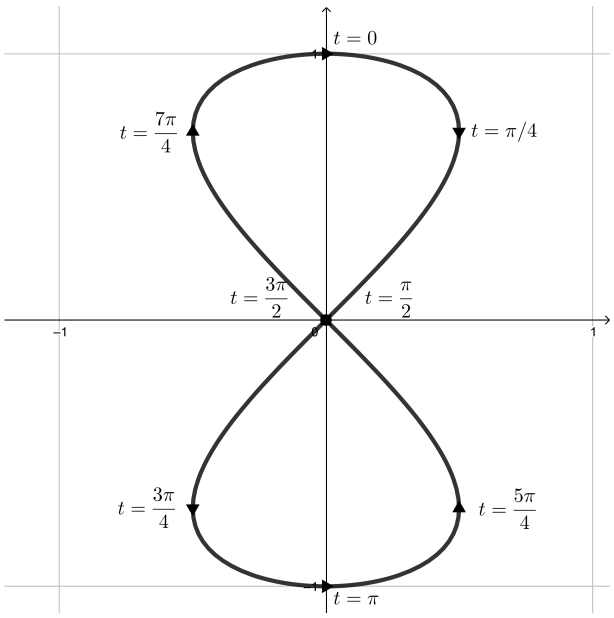
Solución. $\dfrac{dy}{dx}$ puede cambiar de signo en los valores de t calculados previamente. Una tabla de signos entre aquellos puntos indica los siguientes valores:

	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$-\text{sen}(t)$	-	-	-	+	+	+	
$\cos^2(t) - \text{sen}^2(t)$	+	-	+	+	-	+	
$\dfrac{dy}{dx}$	-	+	-	+	-	+	

por lo tanto, $\dfrac{dy}{dx} > 0$ cuando t está en los intervalos $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}), (\pi, \frac{5\pi}{4})$ y $(\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$, y $\dfrac{dy}{dx} < 0$ cuando t está en los intervalos $(0, \frac{\pi}{4}), (\frac{3\pi}{4}, \pi)$ y $(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$. □

(d) Dibuje un esbozo de la curva.

Solución.



□

Distribución de puntaje

- **a) [0.5p]** por identificar los t en los que pasa por $(0, 0)$.
- **a) [0.5p]** por calcular $\dfrac{dy}{dx}$.
- **a) [0.5p]** por encontrar las rectas tangentes.
- **b) [0.5p]** por identificar que las rectas son verticales cuando $x'(t) = 0$ y horizontales cuando $y'(t) = 0$.
- **b) [0.5p]** por encontrar los tiempos t donde $x'(t) = 0$.
- **b) [0.5p]** por calcular los puntos donde las rectas son verticales.
- **b) [0.5p]** por encontrar los tiempos t donde $y'(t) = 0$.

- **b) [0.5p]** por calcular los puntos donde las rectas son horizontales.
- **c) [0.5p]** por encontrar los intervalos donde $\dfrac{dy}{dx} > 0$.
- **c) [0.5p]** por encontrar los intervalos donde $\dfrac{dy}{dx} < 0$.
- **d) [1p]** por el esbozo correcto de la curva.

---

2. Sea $\mathcal{C}$ la curva de intersección entre las superficies $z = 4x^2 + y^2$ y $y = x^2$.

   (a) Encuentre una parametrización para $\mathcal{C}$.

   Solución. Una posible parametrización es $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, 4t^2 + t^4)$, $t \in \mathbb{R}$. □

   (b) Calcule una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(1, 1, 5)$.

   Solución. La curva pasa por el punto $(1, 1, 5)$ cuando $t = 1$. Luego, la dirección de la recta tangente es $\mathbf{r}'(1)$. Tenemos que $\mathbf{r}'(t) = (1, 2t, 8t + 4t^3)$, de donde $\mathbf{r}'(1) = (1, 2, 12)$. Así, la recta tangente viene dada por la ecuación vectorial $\mathbf{x} = (1, 1, 5) + \lambda(1, 2, 12)$. □

   (c) Determine las ecuaciones de los vectores tangente, normal y binormal unitarios en $(0, 0, 0)$.

   Solución. Tenemos que la curva pasa por el punto (0,0,0) cuando $t = 0$. Además, sabemos que $\mathbf{r}'(t) = (1, 2t, 8t + 4t^2)$, de donde $\mathbf{r}''(t) = (0, 2, 8 + 8t)$. Así:

   - $\mathbf{T}(0) = \dfrac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|} = (1, 0, 0)$.
   - $\mathbf{B}(0) = \dfrac{\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0)}{|\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0)|} = \dfrac{(1, 0, 0) \times (0, 2, 8)}{|(1, 0, 0) \times (0, 2, 8)|} = \left(0, \dfrac{-8}{\sqrt{68}}, \dfrac{2}{\sqrt{68}}\right)$
   - $\mathbf{N}(0) = \mathbf{B}(0) \times \mathbf{T}(0) = \left(0, \dfrac{2}{\sqrt{68}}, \dfrac{8}{\sqrt{68}}\right)$

   □

Distribución de puntaje:

- **a) [0.8p]** por la fórmula de la parametrización.
- **a) [0.2p]** por el dominio de la parametrización.
  Este puntaje se dará siempre y cuando la parametrización sea correcta, o incorrecta pero de la forma $(t, t^2, f(t))$.
- **b) [0.5p]** por identificar $t = 1$ u otro consistente con la parametrización dada.
  Este puntaje se dará aún cuando la parametrización sea incorrecta.
- **b) [0.5p]** por $\mathbf{r}'(t)$.
  En caso de una parametrización incorrecta de la forma $(t, t^2, f(t))$, asignar 0.3p por derivar correctamente.
- **b) [0.5p]** por la ecuación de la recta.
  Este puntaje solo se dará si la parametrización es correcta.
- **c) [0.5p]** por identificar $t = 0$ u otro consistente con la parametrización dada.
  Este puntaje se dará aún cuando la parametrización sea incorrecta.
- **c) [3p]** por los vectores unitarios solicitados (1 punto cada uno).
  En caso de parametrizar mal $\mathcal{C}$, pero de la forma $(t, t^2, f(t))$, asignar medio punto por cada vector consistente con su parametrización.

---

3. Considere la curva dada por la parametrización

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{t^2+1} - 1, \frac{2t}{t^2+1}, \arctan(t)\right), \quad t \geq 0$$

(a) Demuestre que $|\mathbf{r}'(t)| = \dfrac{1}{1+t^2}$.

Solución. Se tiene que

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-4t}{(t^2+1)^2}, \frac{2-2t^2}{(t^2+1)^2}, \frac{1}{t^2+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}(t^2+1)^2}(-4t, 2-2t^2, t^2+1).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}'(t)| &= \frac{1}{\sqrt{5}(t^2+1)^2}\sqrt{(-4t)^2 + (2-2t^2)^2 + (t^2+1)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}(t^2+1)^2}\sqrt{4t^4 + 8t^2 + 4 + (t^2+1)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}(t^2+1)^2}\sqrt{5(t^2+1)^2} \\
&= \frac{1}{t^2+1}
\end{aligned}$$

□

(b) Calcule el largo total de la curva.

Solución. El largo de la curva es

$$L = \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}dt = \arctan(t)|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

□

(c) Parametrice la curva en longitud de arco s.
(*Indicación: Recuerde que* $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ *y* $sen(2\theta) = 2sen(\theta)\cos(\theta)$)

Solución. Tenemos que $s(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{u^2+1}du = \arctan(u)|_0^t = \arctan(t)$, de donde $t = \tan(s)$. Así, la curva parametrizada en longitud de arco es

$$\varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\tan^2(s)+1} - 1, \frac{2\tan(s)}{\tan^2(s)+1}, s\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\cos(2s), \text{sen}(2s), s\right), \quad 0 \leq s < \frac{\pi}{2}.$$

□

(d) Determine los vectores tangente, normal y binormal unitarios para cada s.

Solución. Los vectores pedidos son:

- $\mathbf{T}(s) = \varphi'(s) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2\text{sen}(2s), 2\cos(2s), 1)$.
- $\mathbf{N}(s) = \dfrac{\mathbf{T}'(s)}{|\mathbf{T}'(s)|} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{5}}(-4\cos(2s), -4\text{sen}(2s), 0)}{\frac{4}{\sqrt{5}}} = (-\cos(2s), -\text{sen}(2s), 0)$.

- $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\text{sen}(2s), -\cos(2s), 2)$

□

(e) Calcule la curvatura y torsión de la curva para cada s.

Solución. La curvatura es $\kappa = |\mathbf{T}'(s)| = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$. Para la torsión calculamos

$$\mathbf{B}'(s) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\cos(2s), 2\text{sen}(2s), 0) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{N}(s)$$

Con lo que la torsión es $\tau = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ □

Distribución del puntaje:

- **a)** **[0.5p]** por calcular correctamente $\mathbf{r}'(t)$.
- **a)** **[0.5p]** por demostrar correctamente que $|\mathbf{r}'(t)| = \dfrac{1}{t^2+1}$.
- **b)** **[0.5p]** por calcular el largo correctamente.
- **c)** **[0.5p]** por llegar al cambio $t = \tan(s)$.
- **c)** **[0.8p]** por reemplazar en la parametrización original.
  En caso de reemplazar correctamente $t = \tan(s)$ pero luego equivocarse al simplificar, asignar igualmente la totalidad del puntaje.
- **c)** **[0.2p]** por el dominio de s.
  Este puntaje se dará independiente de si la parametrización está correcta.
- **d)** **[1.8p]** por los vectores TNB (0.6p cada uno).
- **e)** **[0.6p]** por la curvatura.
- **e)** **[0.6p]** por la torsión.
  Si reemplazan $t = \tan(s)$ pero luego tienen errores al simplificar la reparametrización, asignar la mitad de los puntajes de TNB, curvatura y torsión (en caso de ser consistente con su parametrización).

---

4. Sea $\mathbf{r}(t) = (\cos(at), \text{sen}(at), f(t))$, $-\pi \leq t \leq \pi$, donde $a \neq 0$ y $f(t)$ es una función que cumple que $a^2 f'(t) + f'''(t) = 0$.

   (a) Demuestre que la curva es plana.

   Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= (-a\text{sen}(at), a\cos(at), f'(t)) \\
\mathbf{r}''(t) &= (-a^2\cos(at), -a^2\text{sen}(at), f''(t)) \\
\mathbf{r}'''(t) &= (a^3\text{sen}(at), -a^3\cos(at), f'''(t)).
\end{aligned}$$

   Luego,

$$\begin{aligned}
(r'(t) \times r''(t)) \cdot r'''(t) &= (af''(t)\cos(at) + a^2 f'(t)\text{sen}(at), af''(t)\text{sen}(at) - a^2 f'(t)\cos(at), a^3) \\
&\quad \cdot ((a^3\text{sen}(at), -a^3\cos(at), f'''(t)) \\
&= a^4 f''(t)\text{sen}(at)\cos(at) + a^5 f'(t)\text{sen}^2(at) - a^4 f''(t)\text{sen}(at)\cos(at) \\
&\quad + a^5 f'(t)\cos^2(at) + a^3 f'''(t). \\
&= a^5 f'(t) + a^3 f'''(t) \\
&= a^3(a^2 f'(t) + f'''(t)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

   Por tanto, la torsión es $\tau = \dfrac{(r'(t) \times r''(t)) \cdot r'''(t)}{|r'(t) \times r''(t)|^2} = 0$, demostrando así que la curva es plana. □

   (b) Si $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$ y $f''(0) = 2$, encuentre la ecuación del plano que contiene a la curva.

   Solución. El plano corresponde al plano osculador, el que debe ser igual en cualquier punto de la curva. Calculemos el plano osculador cuando $t = 0$.
   Tenemos que $\mathbf{r}(0) = (1, 0, f(0)) = (1, 0, 1)$. Por otro lado, el vector binormal va en la misma dirección que $\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0) = (af''(0), -a^2 f'(0), a^3) = (2a, a^2, a^3)$. Así, el plano viene dado por la ecuación

$$2a(x-1) + a^2 y + a^3(z-1) = 0$$

   o bien, como $a \neq 0$,

$$2(x-1) + ay + a^2(z-1) = 0.$$

   □

Distribución del puntaje:

- **a) [1.5p]** por las derivada de $\mathbf{r}$ (0.5p cada una).
- **a) [1p]** por demostrar que $(r'(t) \times r''(t)) \cdot r'''(t) = 0$.
- **a) [0.5p]** por concluir que la curva es plana porque $\tau = 0$.
- **b) [1p]** por conocer (explícita o implícitamente) que el plano que contiene a la curva es el plano osculador.
- **b) [0.5p]** por calcular $\mathbf{r}(0)$.
- **b) [1p]** por calcular $\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0)$ o algún otro vector perpendicular al plano.
- **b) [0.5p]** por calcular la ecuación del plano.