Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Calculo III - MAT1630
Profesor: Giancarlo Urzua
Ayudante: Jorge Andrés Matamala O. (jnmatamala@uc.cl)

Ayudantía 13

Teorema de Kelvin-Stokes

1. Resumen

Sea una superficie suave por tramos y orientada (vector normal para afuera) que está acotada por una curva C por tramos, simple y cerrada con orientación positiva. Sea F un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contenga a S. Entonces

$$\oint_C F \cdot dr = \int\int_S rot\ F\ \cdot\ dS$$

El teorema de Kelvin-Stokes establece que la integral de línea alrededor de la curva frontera de S de la componente tangencial de F es igual a la integral de superficie de la componente normal del rotacional de F

Para usarlo, debemos tener la superficie orientada con sus vectores normales para afuera (para calcular la integral con el rotor) o la curva orientada positivamente (para calcular el rotor mediante la integral de línea).

¡Ahora podemos calcular integrales de línea de una forma más fácil y bonita!

2. Para refrescar la memoria

La integral de línea del campo vectorial F sobre la curva C parametrizada por $r(t)$ se calcula cómo

$$\int_a^b F(r(t))\ \cdot r'(t)dt$$

Para calcular la integral del campo escalar f sobre la superficie S parametrizada por $\phi(u, v)$ hacemos

$$\int\int_S f(x, y, z)dS\ =\ \int\int_D f(\phi)|\phi_u \times \phi_v|dA$$

Lo anterior nos permite calcular la integral de superficie convirtiéndola en una integral doble sobre el dominio D que determinan los parámetros. Recordar que si el campo es $f = 1$, estamos calculando el área común y corriente.

Para calcular la integral del campo vectorial F sobre la superficie S parametrizada por $\phi(u, v)$, mejor conocida como flujo de F a través de S se hace

$$\int\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int\int_S \vec{F} \cdot n\ dS$$

En chileno, nos dice que la integral de superficie de un campo vectorial en S es **igual** a la integral de superficie de su **componente normal**. Cabe destacar que, si S está definida por una función vectorial

$\phi(u, v)$, la componente normal está dada por $\phi_u \times \phi_v$ y nuestra integral de superficie se puede calcular cómo la integral doble sobre el dominio D de los parámetros

$$\int\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int\int_D \vec{F}(\phi) \cdot (\phi_u \times \phi_v) dA$$

Es importante recordar que **siempre** se debe corroborar que el sentido del vector normal n sea hacía afuera de nuestra superficie. Para superficies compuestas funciona igual, debemos preocuparnos de que cada vector correspondiente a las superficies apunte para afuera.

Problema 1

Calcule la integral del rotor de F sobre la superficie S. Donde el campo vectorial es el siguiente

$$F(x, y, z) = (e^{xy}, e^{xz}, x^2 z)$$

y la superficie S es la mitad del elipsoide $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ que está a la derecha del plano xz orientado en la dirección del eje y positivo.

Problema 2

Determine $\int_S \nabla \times F \cdot dS$. Con S la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ orientado hacia arriba y el campo vectorial $F(x, y, z) = (x^2 z^2, y^2 z^2, xyz)$

Problema 3

Determine $\int_\alpha F \cdot dr$. Con $\alpha = (sen(t), cos(t), sen(2t)), t \in [0, 2\pi]$ y $F(x, y, z) = (y + sen(x), z^2 + cos(y), x^3)$

Problema 4

Sea la curva γ que se obtiene con la intersección de de las siguientes superficies

$$x^2 + y^2 = z \qquad x + y + z = 1$$

y sea el campo definido por

$$F(x, y, z) = (x + z, 2 - 2x, z)$$

Calcule $\oint_\gamma \vec{F} \cdot dl$

Problema 5

Sea S la porción de $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ comprendida entre $z = -1$ y $z = 1$. Calcule el valor de

$$\int\int_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

Siendo $\vec{n}$ el vector unitario apuntando hacia afuera y $\vec{F} = (P, Q, R)$ es un campo de clase C^1 con $P(x, y, z) = yz$, $Q(x, y, z) = xz$ y $R(x, y, z) = h(z)$