PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
23 de junio de 2016.

**MAT–1630 - CALCULO III**
**EXAMEN**

1. Si $z^3 - xz - y = 0$, encuentre $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ cuando $(x, y, z) = (-1, 0, -1)$.

   Solución:
   Sea $f(x, y, z) = z^3 - xz - y$. Calculamos las primeras y algunas segundas derivadas parciales de $f(x, y, x)$:

   $$f_x(x, y, x) = -z,\ f_y(x, y, x) = -1,\ f_z(x, y, x) = 3z^2 - x,$$
   $$f_{xy}(x, y, z) = 0,\ f_yz(x, y, z) = 0,\ f_{zz}(x, y, z) = 6z,\ f_{xz}(x, y, z) = -1.$$

   Luego, en el punto $(-1, 0 - 1)$, nos quedan

   $$f_x(-1, 0 - 1) = 1,\ f_y(-1, 0 - 1) = -1,\ f_z(-1, 0 - 1) = 4$$
   $$f_{xy}(-1, 0 - 1) = 0,\ f_yz(-1, 0 - 1) = 0,\ f_{zz}(-1, 0 - 1) = -6,\ f_{xz}(-1, 0, -1) = -1.$$

   Como $f_z((-1, 0-1)) \neq 0$ podemos utilizar el teorema de la función implicita para despejar $z$ en función de $x, y$. Además como $f(x, y, z)$ es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $z$ también lo será. Luego, por regla de la cadena nos queda

   $$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z(x, y)) = 0 \Rightarrow f_x + f_z z_x = 0 \Rightarrow z_x(-1, 0) = -\frac{1}{4},$$
   $$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z(x, y)) = 0 \Rightarrow f_y + f_z z_y = 0 \Rightarrow z_x(-1, 0) = \frac{1}{4}.$$

   Así,

   $$\frac{\partial}{\partial y}\left(f_x + f_z z_x = 0\right) \Rightarrow f_{xy} + f_{xz} z_y + z_x\left(f_{zy} + f_{zz} z_x\right) + f_z z_{xy} = 0 \Rightarrow z_{xy}(-1, 0) = \frac{5}{32}.$$

2. Determine el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = 4 + xy - x^2 - y^2$ sobre el conjunto $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   Solución:
   Calculamos el gradiente y la matriz Hessiana de $f(x, y)$:

   $$\nabla f(x, y) = (y - 2x,\ x - 2y),\ H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Calculamos los puntos críticos de $f(x, y)$ en $D$,

   $$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} y - 2x = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (0, 0) \in D.$$

Aplicamos el criterio del Hessiano para el punto crítco $(0,0)$,

$$f_{xx}(0,0) = -2 < 0,\ \det\left(H(f)(0,0)\right) = 4 - 1 = 3 > 0\,.$$

Así $f(0,0) = 4$ es un máximo local de $f(x,y)$ en $D$.
Ahora buscamos puntos críticos en la frontera de $D$, para esto utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange:
Notamos que la condición de frontera viene por la función $g(x,y) = x^2 + y^2$, así

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 2x = \lambda 2x \\ x - 2y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x(2 + 2\lambda) = 0 \\ x - y(2 + 2\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Notar que el sistema tendrá solución si

$$(2 + 2\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}.$$

Así los puntos que aparecen con los valores de $\lambda$ son:

$$\lambda = -\frac{1}{2} : \begin{cases} y - x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\lambda = -\frac{3}{2} : \begin{cases} y + x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Evaluamos en $f(x,y)$ para comparar los valores críticos:

$$f(0,0) = 4,\ f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4},\ f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}.$$

Por tanto el máximo y el mínimo de $f(x,y)$ son 4 y $\frac{13}{4}$ respectivamente.

3. Sea $C$ la curva dada por $x^2 + y^2 = 1, x \leq 0$ orientada positivamente. Encontrar el trabajo realizad por la fuerza

$$F(x,y) = \left(y\frac{x-2}{1-x}, \ln(1-x)\right)$$

al mover una partícula a lo largo de la curva $C$.
Solución:
Debemos calcular

$$\int_C F.$$

Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1,\ x \leq 0\}$ la regíon encerrada por la curva $C$. Notar que

$$P(x,y) = y\frac{x-2}{1-x},\ Q(x,y) = \ln(1-x)$$

son de clase $C^\infty$ en $D$, así podemos aplicar el teorema de Green para calcular el trabajo realizado por $F(x,y)$ sobre $C$.

$$\int_C F = \iint_D Q_x - P_y dxdy = \iint_D \frac{-1}{1-x} - \frac{x-2}{1-x} dxdy = -\iint_D dxdy = -\frac{\pi}{2}.$$

4. Sea $S$ la superficie definida por $z = 5 - x^2 - y^2$ con $z \geq 1$, orientada conel vector normal unitario apuntando hacia abajo. Considere el campo vectorial

$$F(x,y,z) = \left(e^z + 1, y, y\cos(x^2)\right).$$

Calcule $\iint_S (\nabla \times F) \cdot dA$.

Solución:

Como $F$ es de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ podemos aplicar el teorema de Stokes. Notar que la frontera de $S$ es la curva $x^2 + y^2 = 4$, $z = 1$, denotamos a esta curva $\gamma(t)$ orientada negativamente. Luego,

$$\begin{aligned}
\iint_S (\nabla \times F) \cdot dA = \int_\gamma F &= -\int_0^{2\pi} \left\langle F \circ \gamma, \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= -\int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} e+1 \\ \sin(t) \\ \sin(t)\cos(\cos(t)^2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= -\int_0^{2\pi} -2(e+1)\sin(t) + \sin(2t) dt \\
&= -2(e+1)(\cos(2\pi) - \cos(0)) + \frac{\cos(4\pi) - \cos(0)}{2} = 0.
\end{aligned}$$

*En otra notación* : Si $\vec{r}(t) = (2\cos t,\, -2\,\text{sen}\, t,\, 1)\,;\ 0 \leq t \leq 2\pi$ es la parametrización de la curva $C$ que es frontera de $S$, entonces la integral es

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \vec{F}\left(2\cos\, t, -2\,\text{sen}\, t, 1\right) \cdot (-2\,\text{sen}\, t, -2\cos\, t, 0)\, dt \\
&= -2\int_0^{2\pi} \left(e+1, -2\,\text{sen}\, t, -2\,\text{sen}\, t, \cos\left(4\cos^2 t\right)\right) \cdot (-2\,\text{sen}\, t, -2\cos\, t, 0)\, dt \\
&= -2\int_0^{2\pi} \left[(e+1)\,\text{sen}\, t + 2\,\text{sen}\, t\cos\, t\right] dt
\end{aligned}$$

etc.

*Método alternativo* : "Cerramos" la superfice de integración agregando el disco $S_1 : x^2 + y^2 = 4,\ z = 1$ con normal hacia arriba. Entonces, aplicando el Teorema de la divergencia al sólido $\Omega,$ envuelto por $S \cup S_1,$ :

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot dA + \iint_{S_1} (\nabla \times F) \cdot dA = \iiint_\Omega \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F})\, dV$$

Pero, por la identidad $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F})$ obtenemos

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot dA = \iint_{-S_1} (\nabla \times F) \cdot dA$$

etc.

5. Calcule el flujo del campo campo $\overrightarrow{F} = (z \arctan(y^2),\ z^3 \ln(x^2+1),\ z)$ a través de la porción del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 2$ que está encima del plano $z = 1,$ y con la orientación hacia arriba.
<u>Solución:</u>
Notar que el campo $F$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$, así podemos utilizar el teorema de la divergencia. Sea $V$ el volumen que encierra el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 1$.
Notar que el flujo de $F$ sobre la superficie $S$ satisface a

$$\iint_S F \cdot dA - \iint_D F \cdot dA + = \iiint_V \operatorname{div}(F) dV, \tag{1}$$

donde $D$ es el disco de radio 1 centrado en $(0, 0, 1)$ en el plano $z = 1$ orientado con el normal apunta hacia afuera.
Notar que $\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F = 1$, por tanto calculamos el volumen de $V$ y el flujo de $F$ sobre el disco $D$.

$$\operatorname{Vol}(V) = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-z}} r dr dz d\theta = \pi \int_1^2 2 - z dz = \frac{\pi}{2}.$$

Parametrizamos el disco con $\varphi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), 1)$, luego

$$\begin{aligned} \iint_D F \cdot dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \langle F \circ \varphi, \varphi_r \times \varphi_\theta \rangle\, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\langle F \circ \varphi, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \right\rangle dr d\theta \\ &= \textstyle\int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta = \pi. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\iint_S F \cdot dA = \operatorname{Vol}(V) + \iint_D F \cdot dA = \frac{3\pi}{2}$$