Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad De Matemáticas
Primer semestre 2023

Interrogación 3
MAT1630 - Cálculo III

1. Considere la superficie $S = \{(x, y, z) : \text{ donde } x^2 + y^2 - 10x = z^2,\ z \geq 0\}$.

   (a) Encuentre una parametrización de S.

   (b) Encuentre el plano tangente en el punto $(5, 5\sqrt{2}, 5)$.

2. Considere la superficie parametrizada S como $(v, \cosh v \sin(u), \cosh v \cos(u))$ con $u \in [0, 2\pi)$ y $v \in [-L, L]$. *Indicación: Recuerde que* $\cosh v = \frac{e^v + e^{-v}}{2}$, $\sinh v = \frac{e^v - e^{-v}}{2}$ *y* $\sinh^2 v + 1 = \cosh^2 v$.

   (a) Encuentre el área de S.

   (b) Encuentre la coordenada z del centro de masa de S si la densidad es $\rho(x, y, z) = 1$.

3. Considere la superficie $S = \{(x, y, z) : z = 1 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\}$.

   (a) Si consideramos una densidad $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$ sobre S, determine la masa de la superficie.

   (b) Si consideramos el campo $\vec{F} = (x, y, z)$, encuentre la integral de flujo

   $$\iint_S \vec{F} \cdot dS,$$

   donde S esta orientada de acuerdo a la normal que apunta hacia arriba.

4. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = \left(\dfrac{xe^{z^2}}{x^2 + y^2 + 1}, \dfrac{y\, e^{z^2}}{x^2 + y^2 + 1}, z \right)$ y la superficie $S_1 \cup S_2$ donde S_1 está parametrizada por $\left(\frac{6e^z}{\sqrt{5 + 4\sin^2\theta}} \cos\theta, \frac{6e^z}{\sqrt{5 + 4\sin^2\theta}} \sin\theta, z \right)$ con $\theta \in [0, 2\pi)$ y $z \in [0, 1]$ y S_2 está dada por $(r\cos\theta, r\sin\theta, 1)$ con $\theta \in [0, 2\pi)$ y $0 \leq r \leq \frac{6e}{\sqrt{5 + 4\sin^2\theta}}$.

   (a) Muestre que $\text{rot}(\vec{F}) = \left(-\frac{2zy\, e^{z^2}}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2zx\, e^{z^2}}{x^2 + y^2 + 1}, 0 \right)$.

   (b) Encuentre una curva γ tal que si S esta orientada de acuerdo a la normal que apunta hacia arriba entonces

   $$\iint_{S_1 \cup S_2} \left(-\frac{2zy\, e^{z^2}}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2zx\, e^{z^2}}{x^2 + y^2 + 1}, 0 \right) \cdot dS = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

(c) Para cualquier curva cerrada γ en el plano calcule

$$\int_\gamma \frac{x}{x^2+y^2+1}dx + \frac{y}{x^2+y^2+1}dy.$$

(d) Utilice lo anterior para calcular

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \left(-\frac{2zy\, e^{z^2}}{x^2+y^2+1}, \frac{2zx\, e^{z^2}}{x^2+y^2+1}, 0 \right) \cdot dS$$

Tiempo: 2 horas

1. (a) La ecuación es equivalente a $(x-5)^2+y^2=z^2+25$. Por lo tanto una parametrización es $S(\theta,z)=(5+\sqrt{z^2+25}\cos\theta,\sqrt{z^2+25}\sin\theta,z)$ con $\theta\in[0,2\pi)$ y $z\in[0,\infty)$

   (b) El punto corresponde a $\theta=\frac{\pi}{2}$ y $z=5$. Los vectores tangentes están dados por

$$S_\theta=\sqrt{z^2+25}(-\sin\theta,\cos\theta,0)$$
$$S_z=\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+25}}\cos\theta,\frac{z}{\sqrt{z^2+25}}\sin\theta,1\right).$$

   En el punto esto corresponde a

$$S_\theta=5\sqrt{2}(-1,0,0)$$
$$S_z=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},1\right).$$

   Acá hay dos posibles formas de escribir el plano tangente:

   - En forma paramétrica

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\sqrt{2}\\5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-5\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix}+\xi\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\1\end{pmatrix},$$

     donde $\lambda,\xi\in\mathbb{R}$ son parámetros.

   - Se puede encontrar el vector normal $N=S_\theta\times S_z=5\sqrt{2}\left(0,\,1,\,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. La ecuación del plano tangente es $N\cdot((x,y,z)-(5,5\sqrt{2},5))=0$. Es decir,

$$\sqrt{2}y-z=5.$$

2. (a) Primero necesitamos calcular $\|S_u \times S_v\|$.

$$S_u = (0, \cosh v \cos(u), -\cosh v \sin(u))$$
$$S_v = (1, \sinh v \sin(u), \sinh v \cos(u))$$

Por lo tanto

$$S_u \times S_v = (\cosh v \sinh v, -\cosh v \sin(u), -\cosh v \cos(u)).$$

Esto nos lleva a $\|S_u \times S_v\|^2 = \cosh^2 v(1 + \sinh^2 v) = \cosh^4 v$. Entonces

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \int_{-L}^{L} \int_{0}^{2\pi} \cosh^2 v \, du \, dv \\
&= 2\pi \int_{-L}^{L} \frac{e^{-2v} + e^{2v} + 2}{4} dv \\
&= \pi \int_{-L}^{L} (\cosh(2v) + 1) dv \\
&= \pi(\sinh(2L) + 2L).
\end{aligned}$$

(b) Esto corresponde a calcular la integral

$$\iint_S z dS = \int_{-L}^{L} \int_{0}^{2\pi} \cosh^3 v \cos(u) du dv = 0.$$

3. Considere la superficie $S = \{(x, y, z) : z = 1 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\}$.

   (a) Primero parametrizamos la superficie $S(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1 - r^2)$ con $\theta \in [0, 2\pi)$ y $r \in [0, 1]$. Esta última igualdad proviene de la restricción $z \geq 0$. Por lo tanto el elemento de volumen es

$$\begin{aligned} S_r &= (\cos\theta, \sin\theta, -2r) \\ S_\theta &= (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0) \\ S_r \times S_\theta &= r(2r\cos\theta, 2r\sin\theta, 1) \\ \|S_r \times S_\theta\| &= r\sqrt{4r^2+1}. \end{aligned}$$

   Por lo tanto, la masa está dada por

$$\begin{aligned} \iint_S \rho dS &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3\sqrt{4r^2+1}\, d\theta dr \\ &= \frac{2\pi}{32}\int_0^1 [8r(4r^2+1)\sqrt{4r^2+1} - 8r\sqrt{4r^2+1}]dr \\ &= \frac{\pi}{16}\left[2\frac{(4r^2+1)^{\frac{5}{2}}}{5} - 2\frac{(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]\Bigg|_{r=0}^{1} \\ &= \frac{\pi}{8}.\left[\frac{5^{\frac{5}{2}}-1}{5} - \frac{5^{\frac{3}{2}}-1}{3}\right] \end{aligned}$$

   (b) Usando los cálculos de la parte anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F}\cdot dS &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r\cos\theta, r\sin\theta, 1-r^2)\cdot r(2r\cos\theta, 2r\sin\theta, 1) d\theta dt \\ &= 2\pi\int_0^1 r(2r^2+1-r^2)dr \\ &= 2\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

4. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{xe^{z^2}}{x^2+y^2+1}, \dfrac{y\,e^{z^2}}{x^2+y^2+1}, z\right)$ y la superficie $S_1 \cup S_2$ donde S_1 está parametrizada por $\left(\frac{6e^z}{\sqrt{5+4\sin^2\theta}}\cos\theta,\ \frac{6e^z}{\sqrt{5+4\sin^2\theta}}\sin\theta, z\right)$ con $\theta \in [0,2\pi)$ y $z \in [0,1]$ y S_2 está dada por $(r\cos\theta, r\sin\theta, 1)$ con $\theta \in [0,2\pi)$ y $0 \le r \le \frac{6e}{\sqrt{5+4\sin^2\theta}}$.

(a)

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\vec{F}) &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\\ &= \left(0 - \frac{2zy\,e^{z^2}}{x^2+y^2+1}, \frac{2zx\,e^{z^2}}{x^2+y^2+1} - 0, -\frac{2xy\,e^{z^2}}{(x^2+y^2+1)^2} + \frac{2yx\,e^{z^2}}{(x^2+y^2+1)^2}\right)\\ &= \frac{2z\,e^{z^2}}{x^2+y^2+1}(-y,x,0).\end{aligned}$$

Esto es equivalente a la expresión buscada.

(b) Por el teorema de Stokes,

$$\iint_{S_1\cup S_2} \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot dS = \int_{\partial(S_1\cup S_2)} \vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

Por lo tanto tomamos $\gamma(\theta) = \partial(S_1 \cup S_2) = \left(\frac{6}{\sqrt{5+4\sin^2\theta}}\cos\theta,\ \frac{6}{\sqrt{5+4\sin^2\theta}}\sin\theta, 0\right)$ con $\theta \in [0,2\pi)$. La curva debe estar orientada consistentemente, que en este caso corresponde a orientación positiva en el plano.

(c) Si tomamos como superficie S la figura encerrada por la curva γ sobre el plano $z=0$, tenemos que la normal es $(0,0,1)$ (o $(0,0,-1)$ dependiendo de la orientación de la curva), por lo tanto en esta superficie $\operatorname{rot}(\vec{F})\cdot dS = 0$, por lo tanto por teorema de Stokes

$$\int_\gamma \frac{x}{x^2+y^2+1}dx + \frac{y}{x^2+y^2+1}dy = \iint_{S_1\cup S_2} \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot dS = 0.$$

(d) Combinando las partes anteriores tenemos que

$$\iint_{S_1\cup S_2} \left(-\frac{2zy\,e^{z^2}}{x^2+y^2+1}, \frac{2zx\,e^{z^2}}{x^2+y^2+1}, 0\right)\cdot dS = 0.$$