

Teorema de Green

Cálculo III - MAT1630

Rodrigo Vargas

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile

11 de enero de 2023

Teorema de Green

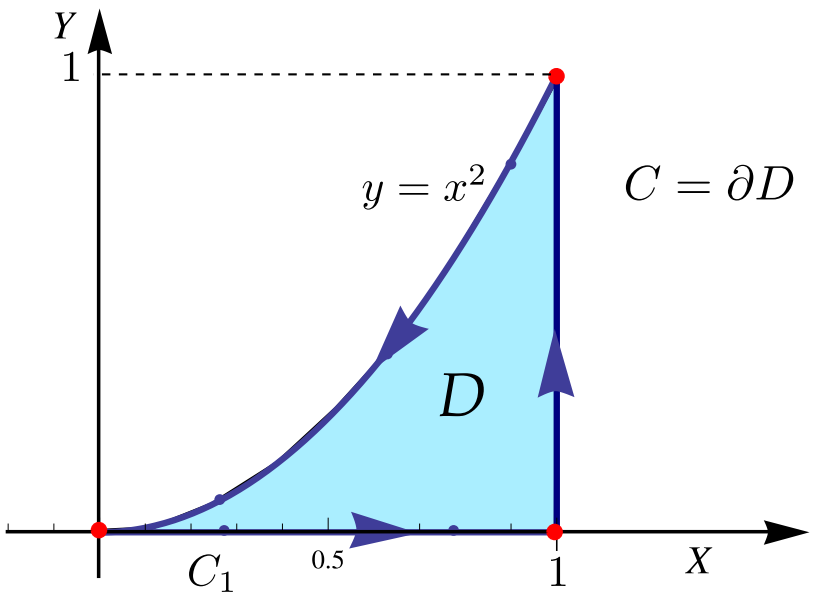
Teorema. (Teorema de Green)

Sea C una curva simple, cerrada, regular a tramos con orientación positiva en el plano, y sea D la región que delimita C. Si P y Q son de clase C^1 en una región abierta que contiene a D, entonces

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \, .$$

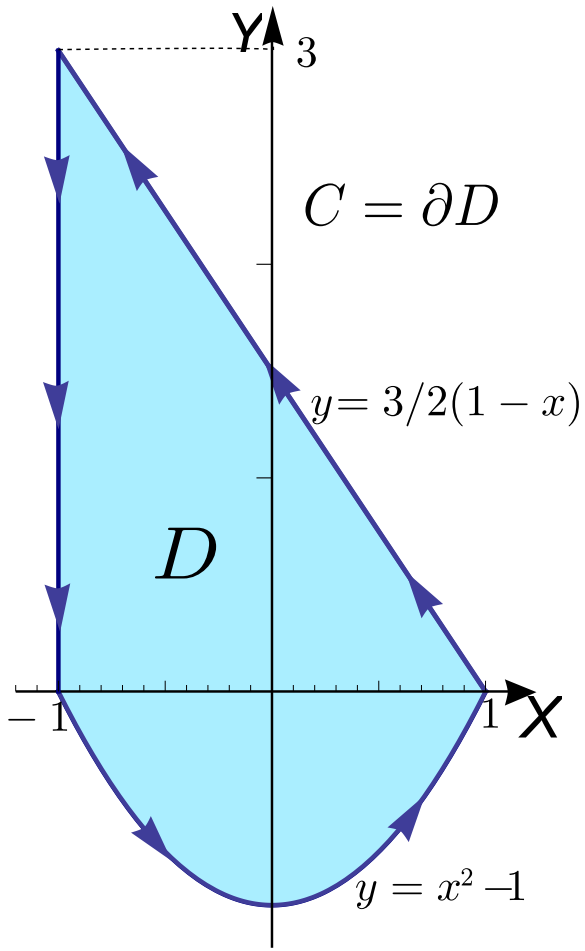
Teorema de Green

EJEMPLO 1 Calcular $\int_C y^2 dx + x^2 dy$ si C es la curva de la figura



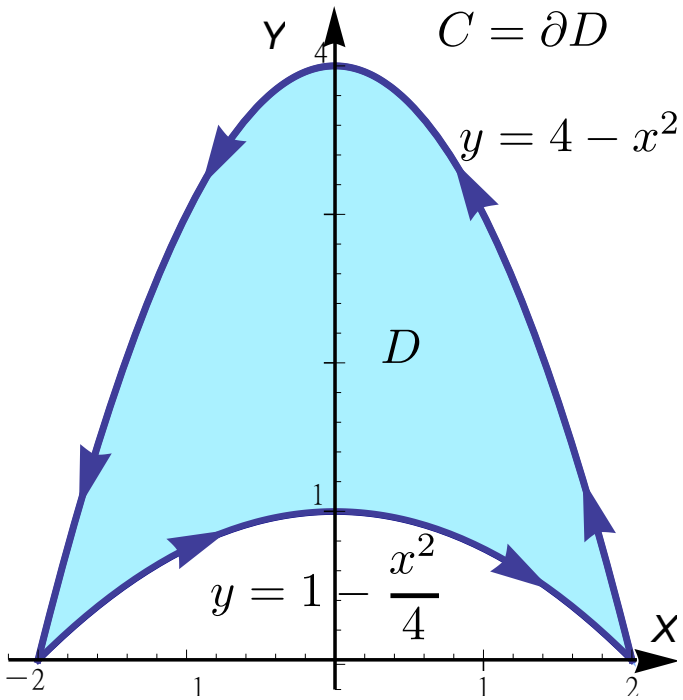
Teorema de Green

EJEMPLO 2 Calcular $\int_C (x+y)dx + (3x + \arctan(y)dy$ si C es la curva de la figura



Teorema de Green

EJEMPLO 3 Calcular $\int_C (x + \arcsin(x))dx + (2x + \ln(y^2 - 3))dy$ si C es la curva de la figura



Teorema de Green

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Teorema.

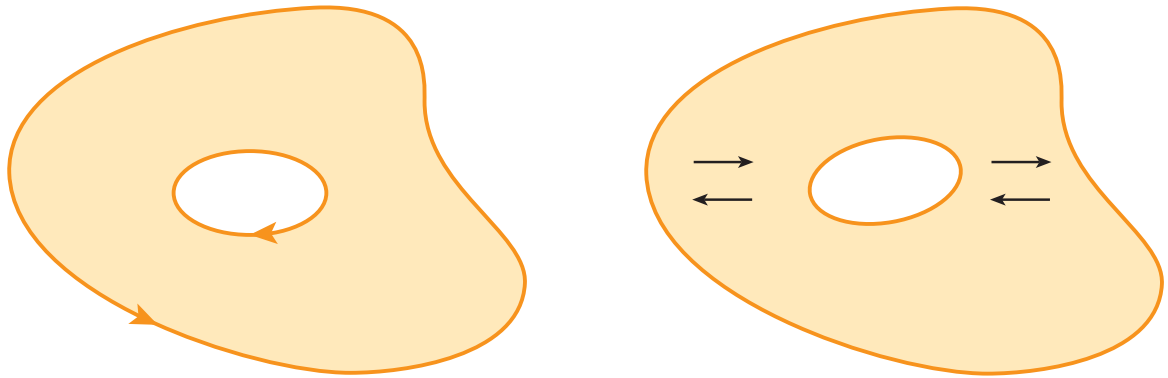
Sea C una curva simple, cerrada, regular a tramos con orientación positiva en el plano, y sea D la región que delimita C. Entonces, el área de la región D es

$$A = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx\,.$$

EJEMPLO 4 Calcule el área delimitada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Teorema de Green

La frontera C de la región D de la figura consiste en dos curvas simples cerradas C_1 y C_2. Suponga que estas curvas frontera están orientadas de tal modo que la región D siempre está a la izquierda cuando se recorre la curva C.



$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy$$

$$= \int_C Pdx + Qdy$$

Teorema de Green

EJEMPLO 5 Si $\mathbf{F}(x, y) = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, demuestre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha = 2\pi$ para toda trayectoria simple, cerrada, orientada positivamente y que encierra el origen.