PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo Semestre 2022

Interrogación N. 1 MAT1630

1. Considere la curva en el plano dada por $\vec{r}(t) = (-t^2, t^3 - 9t + 6\sqrt{3})$, $t \in \mathbb{R}$.

   a) Demuestre que la curva tiene dos rectas tangentes en el punto $(-9, 6\sqrt{3})$ y calcule sus ecuaciones.

   Solución: El punto $(-9, 6\sqrt{3})$ corresponde a $t = 3$ y $t = -3$ en estos puntos el vector tangente es

   $$r'(t) = (-2t, 3t^2 - 9) \quad \rightarrow \quad r'(3) = (-6, 18) \quad \text{y} \quad r'(-3) = (6, 18)$$

   Que son distintos por lo que teemos dos rectas tangentes. Las ecuaciones de las rectas son

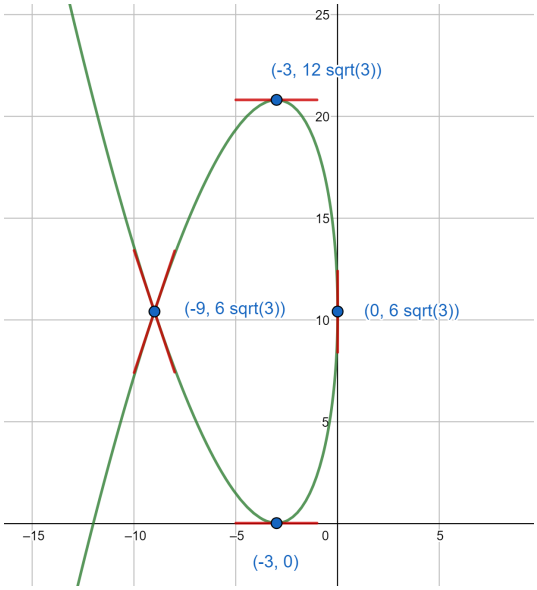
   $$(-9, 6\sqrt{3}) + t(-6, 18) = (-9 - 6t, 6\sqrt{3} + 18t) \quad \text{o} \quad 3x + y = 6\sqrt{3} - 27$$
   $$(-9, 6\sqrt{3}) + t(6, 18) = (-9 + 6t, 6\sqrt{3} + 18t) \quad \text{o} \quad 3x - y = -6\sqrt{3} - 27.$$

   b) Determine los puntos donde la recta tangente es horizontal y los puntos donde la recta tangente es vertical.

   Solución: La recta tangente es vertical cuando el vector tangente es de la forma $(0, y)$, es decir $-2t = 0$ o $t = 0$, que corresponde a $r(0) = (0, 6\sqrt{3})$.
   La recta tangente es vertical si $y = 0$ es decir $3t^2 - 9 = 0$ o $t = \pm\sqrt{3}$ que cooresponden a $r(\sqrt{-3}) = (-3, 12\sqrt{3})$ y $r(\sqrt{3}) = (-3, 0)$.

   c) Esboce el gráfico de la curva.

   Solución: Observamos que $x(t) = -t^2 \leq 0$ y tiende a $-\infty$ cuando $|t| \to \infty$.
   $y(t) = t^3 - 9t + 6\sqrt{3}$
   tiende a ∞ cuando $t \to \infty$,
   y a $-\infty$ cuando $t \to -\infty$.
   Usando también los puntos y tangentes encontrados en las partes anteriores obtenemos



2. *a*) Calcule la longitud del trozo de cardioide cuya ecuación en coordenadas polares es $r = 2 - 2\cos(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$

Solución: Para calcular el largo calculamos el elemento de área

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta = \sqrt{4 - 8\cos(\theta) + 4\cos^2(\theta) + 4\sin^2(\theta)}\, d\theta = 2\sqrt{2 - 2\cos(\theta)}\, d\theta$$

e integramos

$$L = \int_0^\pi ds = \int_0^\pi 2\sqrt{2 - 2\cos(\theta)}\, d\theta = 2\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{2\sin^2(\theta/2)}\, d\theta$$

$$= -4\frac{\cos(\theta/2)}{1/2}\Big|_0^\pi = 8.$$

b) Calcule el área de un pétalo de la rosa cuya ecuación en coordenadas polares es $r = 2\sin(3\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Solución: Para determinar los parámetros correspondientes a un pétalo buscamos donde $0 = r = 2\sin(3\theta)$, que es $\theta = k\pi/3$. Tomamos dos ceros consecutivos para decir que un pétalo corresponde a $t \in [0, \pi/3]$.

Calculamos el área encerrada por este pétalo como

$$A = \int_0^{\pi/3} \frac{r^2}{2}\, d\theta = \int_0^{\pi/3} \frac{4\sin^2(3\theta)}{2}\, d\theta = 2\int_0^{\pi/3} \frac{1 - \cos(6\theta)}{2}\, d\theta$$

$$= \theta - \frac{\sin(6\theta)}{6}\Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3}.$$

3. Sea C la curva dada por la intersección de $z = x^2 + y^2$ y $z = 10 - x^2 - (y-2)^2$.

   a) Encuentre una parametrización de C.

   Solución: Observamos que la intersección ocurre cuando

   $$x^2 + y^2 = z = 10 - x^2 - (y-2)^2 \quad \to \quad x^2 + y^2 - 2y + 2 = 5 \quad \to \quad x^2 + (y-1)^2 = 4$$

   Que corresponde a una circunferencia de radio 2 que se puede parametrizar como $(x, y) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t + 1)$. la coordenada z cumple

   $$z = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 4\sin t + 1 = 5 + 4\sin t$$

   luego

   $$\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t + 1, 5 + 4\sin t) \quad \text{con} \quad t \in [0, 2\pi].$$

   b) Calcule su vector tangente unitario $T(t)$ y binormal unitaria $B(t)$ en cada punto.

   Solución: Calculamos

   $$\vec{r}'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 4\cos t) \quad \text{con}$$

   $$||\vec{r}'(t)|| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 16\cos^2 t} = 2\sqrt{1 + 4\cos^2 t}$$

   luego

   $$T(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{||\vec{r}'(t)||} = \left(\frac{-\sin t}{\sqrt{1+4\cos^2 t}}, \frac{\cos t}{\sqrt{1+4\cos^2 t}}, \frac{2\cos t}{\sqrt{1+4\cos^2 t}} \right)$$

   $$\vec{r}''(t) = (-2\cos t, -2\sin t, -4\sin t)$$

   $$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = (0, -8, 4)$$

   y

   $$B(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{||r'(t) \times \vec{r}''(t)||} = \left(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

   c) Calcule su torsión, concluya que es una curva plana y determine el plano que la contiene.

   Solución: Como el vector binormal $B(t) = (0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ es constante, si s es el arcoparámetro de C, la derivada es $0 = \frac{dB}{ds} = -\tau N$, por lo que la torsión es $\tau = 0$. Como la torsión es 0, la curva es plana y está contenida en su plano osculador: el que tiene B como nomal y pasa por un punto de la curva, tomemos $\vec{r}(0) = (2, 1, 5)$. Este plano tiene ecuación

   $$B \cdot \vec{x} = B \cdot \vec{r}(0) \quad \to \quad -2y + z = -2 + 5 = 3$$

4. Sea $r(t)$ con $t \in [0, \infty)$ una curva parametrizada con $r(0) = (1, 2, 3)$ y vector velocidad $v(t) = (\sqrt{15}\ t, t\sin(t^2), t\cos(t^2))$.

   a) Encuentre la parametrización $r(t)$.

   Solución: Integrando obtenemos

$$r(t) - r(0) = \int_0^t v(u)\ du = \int_0^t \left(\sqrt{15}\ u, u\sin(u^2), u\cos(u^2)\right)\ du$$

$$= \left(\sqrt{15}\ \frac{t^2}{2}, -\frac{\cos(t^2)}{2}, \frac{\sin(t^2)}{2}\right) - \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

   Luego

$$r(t) = \left(1 + \sqrt{15}\ \frac{t^2}{2}, \frac{5 - \cos(t^2)}{2}, 3 + \frac{\sin(t^2)}{2}\right).$$

   b) Encuentre la curva arcoparametrizada $r(s)$.

   Solución: Como $t \geq 0$, arcoparametrizamos con base en $t = 0$

$$||r'(t)|| = ||v(t)|| = \sqrt{15t^2 + t^2\sin^2(t^2) + t^2\cos^2(t^2)} = 4t$$

$$s(t) = \int_0^t ||r'(u)||\ du = \int_0^t 4u\ du = 2t^2$$

   o equivalentemente $t = \sqrt{s/2}$.
   La curva arcoparametrizada es

$$r(s) = \left(1 + \sqrt{15}\ \frac{s}{4}, \frac{5 - \cos(\frac{s}{2})}{2}, 3 + \frac{\sin(\frac{s}{2})}{2}\right).$$

   c) Calcule su curvatura y vector normal $N(s)$.

   Solución: Usando la curva arcoparametrizada calculamos:

$$T(s) = \frac{dr}{ds}(s) = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}\sin\left(\frac{s}{2}\right), \frac{1}{4}\cos\left(\frac{s}{2}\right)\right)$$

$$\kappa(s)N(s) = \frac{dT}{ds}(s) = \left(0, \frac{1}{8}\cos\left(\frac{s}{2}\right), -\frac{1}{8}\sin\left(\frac{s}{2}\right)\right) = \frac{1}{8}\left(0, \cos\left(\frac{s}{2}\right), -\sin\left(\frac{s}{2}\right)\right)$$

   Por lo tanto $\kappa(s) = \frac{1}{8}$ y $N(s) = \left(0, \cos\left(\frac{s}{2}\right), -\sin\left(\frac{s}{2}\right)\right)$.

Tiempo: 2 horas
No se permite el uso de apuntes ni formularios
No se permite el uso de calculadora