P11

$$r(u,v) = (u+v)\hat{i} + (3-v)\hat{j} + (1+4u+5v)\hat{k}$$

Reordenando

$$r(u,v) = \underbrace{(3\hat{j}+\hat{k})}_{a} + \underbrace{(\hat{i}+4\hat{k})}_{D_1}u + \underbrace{(\hat{i}-\hat{j}+5\hat{k})}_{D_2}v$$

Lo que es la ecuación paramétrica de un plano que pasa por $a, (0,3,1)$ y tiene vectores directores D_1 y D_2, $(1,0,4)$ y $(1,-1,5)$ respectivamente.

$$r(u,v) = 2\operatorname{Sen}u\,\hat{i} + 3\operatorname{Cos}u\,\hat{j} + v\hat{k}$$

$$\Rightarrow x = 2\operatorname{Sen}u \wedge y = 3\operatorname{Cos}u \wedge z = v$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{Sen}u \wedge \frac{y}{3} = \operatorname{Cos}u$$

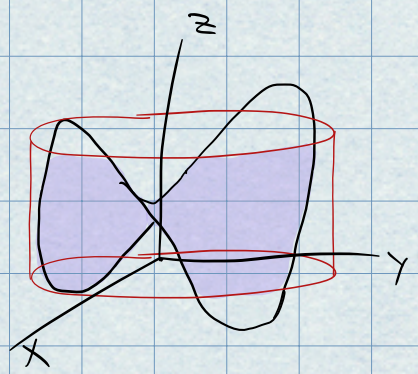
Usando identidad pitagórica

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Es un cilindro parabolico con

semieje menor 2 y semieje mayor 3.

P2)



Debemos parametrizar la papa frita, ya nos entregan la ec.

$$z = x^2 - y^2 \rightarrow z(u,v) = u^2 - v^2$$

∴ La papa frita se parametriza como

$$r(u,v) = \langle u, v, u^2 - v^2 \rangle$$

Calculamos $r_u : \langle 1, 0, 2u \rangle$

$r_v : \langle 0, 1, -2v \rangle$

Ahora $r_u \times r_v$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = \langle -2u, 2v, 1 \rangle$$

Y $|r_u \times r_v| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$

$$\therefore A_S = \iint_D \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1} \, dA$$

Haciendo cambio de coordenadas a polares,

Donde $u^2 \cos^2 + v^2 \sin^2 = r^2$

$$A_S = \iint \sqrt{4r^2 + 1} \; r \, dr \, d\theta$$

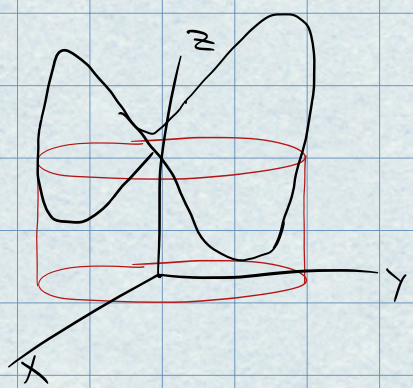
los límites los da el cilindro

$$A_s = \int_0^{2\pi}\int_0^{1} \sqrt{4r^2+1}\; r\,dr\,d\theta$$

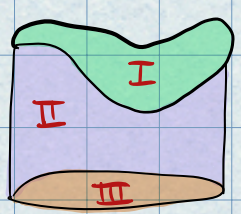
Haciendo $u = r^2$, se resuelve y obtenemos

$$A_s = \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2} - 1\right)$$

P3)



LA DIFERENCIA CON EL OTRO EJERCICIO ES QUE AQUÍ HAY INTERSECCIÓN DE SUPERFICIES. EN EL OTRO ES UNA INECUACIÓN



EL ÁREA TOTAL ES LA SUMA DE C/U.

$S_{III} = \pi$, ES UN CÍRCULO RADIO 1.

SI => PARAMETRIZAMOS

$$z = x^2 - y^2 + 4 \rightarrow z = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta + 4$$

$$\Rightarrow z = r^2\cos 2\theta + 4 \quad \text{(IDENTIDAD)}$$

$$\therefore \quad \alpha(r,\theta) = \langle r, \theta, r^2\cos 2\theta + 4 \rangle$$

$$\alpha_r = \langle 1, 0, 2r\cos 2\theta \rangle$$

$$\alpha_\theta = \langle 0, 1, -2r^2\sin 2\theta \rangle$$

$$\alpha_r \times \alpha_\theta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2r\cos 2\theta \\ 0 & 1 & -2r^2\sin 2\theta \end{vmatrix} = \langle -2r\cos 2\theta, 2r^2\sin 2\theta, 1 \rangle$$

$$= (-2r\cos 2\theta, 2r^2\sin 2\theta, 1)$$

$$|\alpha_r \times \alpha_\theta| = 4r^2\cos^2 2\theta + 4r^2\sin^2 2\theta + 1$$

$$S_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^1 4r^2\cos^2 2\theta + 4r^4\sin^2 2\theta + 1 \; dr\,d\theta$$

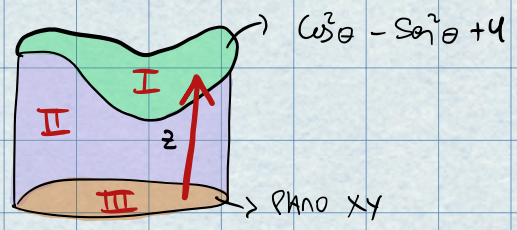
$$= \int_0^{2\pi} \frac{4}{3}\cos^2 2\theta + \frac{4}{5}\sin^2 2\theta + 1 \; d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{8}{15}\sin^2 2\theta + \frac{9}{5}\, d\theta$$

$$= \frac{26\pi}{15}$$

Para S_{II}:

Se tiene el área del manto cilíndrico, donde $r = f > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y z se mueve desde I a III,



Recordar que en una integral doble, si integro 1 obtengo el área

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\cos^2\theta - \sin^2\theta + 4} 1 \, dz\, d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta + 4 \, d\theta$$

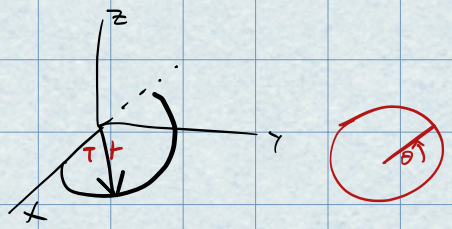
$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos 2\theta + 4 \, d\theta$$

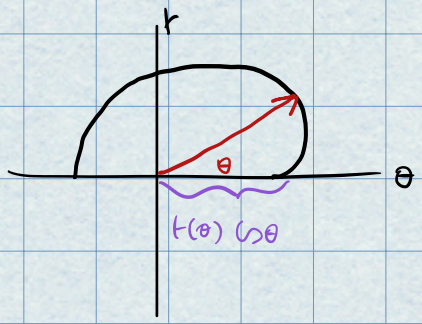
$$\Rightarrow 8\pi$$

$\therefore$ Area total : $8\pi + \pi + \frac{26\pi}{15}$

P4

$r(\theta) = 1 + \theta$





X)

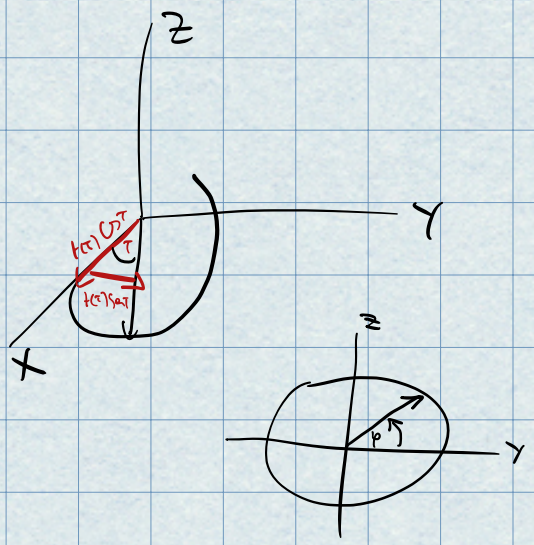
$$\begin{cases} x = x \\ y = r(\tau)\cos\theta \\ z = r(\tau)\sin\theta \end{cases}$$

SI LO ROTA PARA x

Y)

$$\begin{cases} x = r(\tau)\cos\theta \\ y = r(\tau) \\ z = r(\tau)\sin\theta \end{cases}$$

SI LO ROTA PARA y



$$\begin{cases} x = r(\tau)\cos(\tau) \\ y = r(\tau)\sin\tau\cos\varphi \\ z = r(\tau)\sin\tau\sin\varphi \end{cases}$$

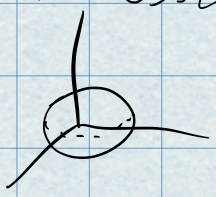
$0 \le \tau \le \pi$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

P5

a) $r(u,v) = (1,5,0) + u(1,2,3) + v(1,1,0)$

b) LA ESFERA : $\begin{cases} x = 4\operatorname{Sen}\varphi\cos\theta \\ y = 4\operatorname{Sen}\varphi\operatorname{Sen}\theta \\ z = 4\cos\varphi \end{cases}$



Sobre el Cono $\Rightarrow z \geq \sqrt{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow 4\cos\varphi \geq \sqrt{(4\operatorname{Sen}\varphi\cos\theta)^2 + (4\operatorname{Sen}\varphi\operatorname{Sen}\theta)^2}$$

$$4\cos\varphi \geq \sqrt{16\operatorname{Sen}^2\varphi(\underbrace{\cos^2\theta + \operatorname{Sen}^2\theta}_{1})}$$

$$4\cos\varphi \geq 4|\operatorname{Sen}\varphi|$$

, Si $0 \leq \varphi \leq \pi$

$\operatorname{Sen}\varphi \geq 0$

$$4\cos\varphi \geq 4\operatorname{Sen}\varphi$$

$$1 \geq \operatorname{Tan}(\varphi) \geq 0$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

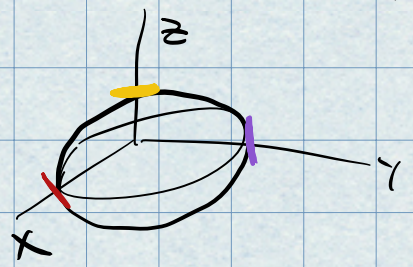
d.

$$\begin{cases} x = 4\,\text{Sen}\varphi\,\text{Cos}\theta \\ y = 4\,\text{Sen}\varphi\,\text{Sen}\theta \\ z = 4\,\text{Cos}\varphi \end{cases}$$

$\theta \in [0, 2\pi]$ y $\varphi \in [0, \pi/4]$

- Si se acota z, se acota φ.
- Si se acota x o y con ambos positivos, se acota θ.

c) Es una esfera achatada y estirada.



Para saber donde corta cada eje, hacemos la ecuación igual a 1

$$9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{1} = 1$$

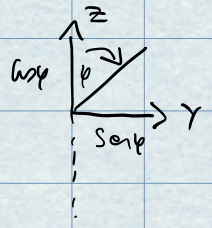
$$\Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{1}\right)^2 = 1$$

Usando esféricas

$$\begin{cases} x = 2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ y = 3\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ z = 1\cos\varphi \end{cases}$$

$$\theta \in [0, 2\pi] \quad \wedge \quad \varphi \in [0, \pi]$$

Si $z \geq 0 \Rightarrow \cos\varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ //



Si $x \geq 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\Rightarrow \varphi \in [0, \pi]$ //

