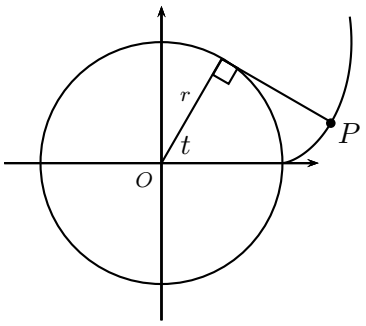
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Temporada Académica de Verano 2023

CÁLCULO III - MAT1630
EJERCICIOS CAPÍTULO 1

Clase 1 y 2: Curvas parametrizadas y curvas en coordenadas polares

1. Se enrolla una cuerda alrededor de un círculo y luego se desenrolla mientras se mantiene tensa (ver la figura). El círculo tiene radio r y centro O, y la posición inicial de P es $(r, 0)$. Determine las coordenadas del punto P como función del ángulo t de la figura.



2. Considere la curva de ecuaciones paramétricas $x = \cos(t)$ e $y = \cos(t)\sin(t)$. Trace la gráfica de la curva paramétrica para $t \in [0, 2\pi]$. Identifique los puntos de intersección con los ejes coordenados, intervalos de crecimiento y concavidad.

3. Considere la circunferencia $C : (x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$ y la recta $L : \ x = 1$. Desde el origen de coordenadas se trazan una semi-recta R que corta a C y L en los puntos P y Q respectivamente. Si rotamos R alrededor del origen, el punto medio entre P y Q describirá una curva que denominaremos α. Encuentre una parametrización de la curva α.

4. Considere las esferas de ecuación $E_1 : x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$ y $E_2 : x^2+(y-1)^2+z^2 = 1$. La intersección de las esferas E_1 y E_2 es una curva que llamaremos α. Encuentre una parametrización de α.

5. Sea C la curva de todos los puntos (x, y) en el primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$ que satisfacen lo siguiente: [distancia entre (x, y) y el eje y]= [distancia entre (x, y) y el punto $(1, 2)$]. Escriba de manera paramétrica la curva C y bosquéjela.

6. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ la curva definida por la intersección de dos superficies.

$$\Gamma : \begin{cases} y^2 + z^2 = 2z \\ y^2 + 4x = 0 \end{cases}$$

Determine una parametrización para Γ (se le está pidiendo que encuentre **una** función r y **un** intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que $r : I \to \mathbb{R}^3$ describa la curva completa).

7. Parametrice la curva dada por la intersección de la superfice $A = \{(tcos(t), tsen(t), z) : t > 0, z \in \mathbb{R}\}$ con el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

8. Sea $\mathcal{C}$ la curva de intersección del cilindro $x^2+y^2 = 1$ y el plano $x+z = 1$. Encuentre una parametrización para la curva $\mathcal{C}$.

9. Considere la curva intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 = 2x \qquad \text{e} \qquad z^2 = x^2 + y^2$$

con $z \geq 0$. Hallar una parametrización de la curva.

10. Bosqueje la curva plana parametrizada en polares como $r = 1 + \text{sen}(\theta), \theta \in [0, 2\pi]$.

11. Considere la curva en $\mathbb{R}^2$ determinada por la ecuación $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$. Exprésela en coordenadas polares y grafíquela.

Clase 3 y 4. Curvas regulares y longitud de arco

1. Considere la curva cicloide de ecuaciones

$$x(t) = t - \sin(t) \qquad \text{y} \qquad y(t) = 1 - \cos(t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

   (a) Determine una parametrización respecto a longitud de arco.

   (b) Calcule la curvatura de la cicloide para $t = \pi$.

2. Considere la curva Γ dada en forma paramétrica:

$$\vec{r}(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t)$$

   Determine una parametrización respecto a longitud de arco de la curva Γ.

3. (a) Demuestre que la fórmula de longitud de curva de la curva polar $r = r(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ está dada por:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + (r')^2(\theta)}\, d\theta\,.$$

   (b) Use lo anterior para encontrar la longitud de la curva polar $r(\theta) = -e^{2\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

(c) Graficar la curva anterior.

4. Considere la curva

$$\alpha(t) = \left(\frac{2}{t^2+1} - 1, \frac{2t}{t^2+1} \right) , \quad t \in \mathbb{R} .$$

(a) Encuentre el arcopárametro de α.

(b) Arcoparametrizar α.

5. Sea C la curva en polares parametrizada por $r = e^{-\theta}, \theta \geq 0$. Bosqueje la curva. ¿Es el largo de esta curva finito o infinito? Si es infinito demuéstrelo, si es finito calcule el largo de la curva.

6. Bosqueje la curva plana parametrizada en polares como $r = 1 + \cos(\theta), \theta \in [0, 2\pi]$ y calcule la longitud de la curva.

7. (a) Encuentre una representación paramétrica de la curva obtenida al intersectar el casquete esférico de radio 2 centrado en el origen, con la superficie parametrizada por $\{(t\cos(t), t\,\mathrm{sen}(t), z) : t > 0, z > 0\}$.

(b) Calcule el vector tangente a la curva de a) en el punto $(0, \pi/2, \sqrt{4 - \pi^2/4})$.

8. Reparametrizar la curva $r(t) = (\cosh(t), \mathrm{sen}(t), \cos(t))$ respecto a la longitud de arco medida desde $(1, 0, 1)$ en la dirección en que se incrementa t.

9. Encuentre la parametrización en longitud de arco de la curva dado por

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{1+t^2} \begin{bmatrix} 3t \\ 3 \\ 1+t^2 \end{bmatrix} , \qquad t \geq 0.$$

10. Considere la curva en $\mathbb{R}^2$ determinada por la ecuación $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$,

(a) Exprésela en coordenadas polares y grafíquela.

(b) Demuestre que su longitud total es $4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sec(2\theta)}\, d\theta$.

11. Parametrice por longitud de arco $\lambda(t) = (e^{2t}cos(2t), e^{2t}sen(2t), 5), \quad t \geq 0$. Encuentre su curvatura en $(1, 0, 5)$.

12. Parametrice la curva dada por la intersección de la superfice $A = \{(tcos(t), tsen(t), z) : t > 0, z \in \mathbb{R}\}$ con el paraboloide $z = x^2 + y^2$. Encuentre la recta tangente y el plano normal en $(-\pi, 0, \pi^2)$.

13. Sea γ una curva plana parametrizada por longitud de arco con curvatura constante. Pruebe que la imagen de γ es una recta o una circunferencia.

14. Considere la curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$r(t) = (\sqrt{2t+1}\cos(\pi t)\,,\ \sqrt{2t+1}\,\mathrm{sen}(\pi t)\,,\ t\sqrt{2\pi}), \quad t \geq 0.$$

    (a) Calcule la ecuación cartesiana de la recta en $\mathbb{R}^3$ tangente a la curva en el punto $(-\sqrt{3}\,, 0,\ \sqrt{2\pi})$.

    (b) Calcule la función longitud de arco $s(t)$ de Γ.

15. Parametrice por longitud de arco la curva polar $r = 1 + \cos\theta$, con parámetro $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Clases 5 y 6.

1. Encuentre una función $\phi(t)$, no constante, de modo que la curva $\vec{r}(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t, \phi(t))$ sea plana.

2. Sea $\gamma(s)$ una curva arcoparametrizada en $\mathbb{R}^3$. Suponga que la curvatura $\kappa(s)$ y la torsión $\tau(s)$ de la curva $\gamma(s)$ satisfacen la relación

$$\frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)^2 = 1\,.$$

    Si $N(s)$, $B(s)$ denotan el vector normal y binormal unitarios de $\gamma(s)$, pruebe que la curva $p(s)$ dada por

$$p(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s) - \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)B(s)$$

    es constante y calcule el valor de $\|\gamma(s) - p(0)\|^2$.

3. Sea Γ una curva con arcoparametrización $\vec{\alpha}(s)$ y curvatura $\kappa(s)$ no nula que está contenida en un plano. Definamos γ una curva con parametrización

$$\vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}(s) + \frac{\vec{N}(s)}{\kappa(s)},$$

    donde $\vec{N}(s)$ es el vector normal a la curva Γ en el punto $\vec{\alpha}(s)$. Demuestre que el vector tangente a la curva γ en el punto $\vec{\beta}(s)$ es paralelo al vector normal a curva Γ en el punto $\vec{\alpha}(s)$.

4. Calcule la curvatura de la curva cicloide $\vec{r}(t) = (t - \mathrm{sin}(t), 1 - \mathrm{cos}(t))$, para todo $t \in (0, 2\pi)$.

5. Sea $\vec{\alpha}(s)$ una curva en $\mathbb{R}^3$ parametrizada respecto a longitud de arco con $T(s)$, $N(s)$ y $B(s)$ sus vectores tangente, normal y binormal, respectivamente. Si la torsión es constante, demuestre que la curva paramétrica

$$\vec{\beta}(s) = -\frac{N(s)}{\tau} + \int_0^s B(t)\,dt$$

tiene curvatura constante.

6. (a) Demuestre que la fórmula de curvatura de la curva polar $r = r(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ está dada por:

$$\kappa(\theta) = \frac{-r''(\theta)r(\theta) + 2(r')^2(\theta) + r^2(\theta)}{(r^2(\theta) + (r')^2(\theta))^{3/2}}\,.$$

   (b) Calcular $\kappa(\pi/3)$ para la curva polar $r(\theta) = 1 + \cos(\theta)$.

7. Sea $\alpha(s)$ una curva arcoparametrizada con curvatura constante. Sean $\vec{T}_\alpha$ y $\vec{N}_\alpha$, respectivamente, los vectores tangente y normal unitario de α. Calcular $\beta' \cdot \beta'''$, donde $\beta(s) = -3\alpha(s) + 5\vec{T}_\alpha(s) + \vec{N}_\alpha(s)$.

8. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva arcoparametrizada que satisface que todos los planos normales a la curva pasan por un punto fijo c. Demuestre que la torsión $\tan_\alpha$ y la curvatura κ_α de α satisfacen

$$\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = \left(\frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha}\right)'\,.$$

   Recuerde que: El plano normal a una curva es aquel plano vectorial que está generado por los vectores normal y binormal de la curva.

9. Considere las esferas de ecuación $E_1 : x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$ y $E_2 : x^2+(y-1)^2+z^2 = 1$. La intersección de las esferas E_1 y E_2 es una curva que llamaremos α.

   (a) Encuentre una parametrización de α.

   (b) Encuentre la curvatura y torsión de α.

10. Encuentre un vector tangente unitario, un vector normal unitario, un vector binormal unitario, la curvatura y la torsión en el punto $(2, 0, 4)$ de la curva dada por:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases}$$

11. Suponga que una curva γ con curvatura κ no nula y torsión τ satisface:

    "Todas las rectas tangentes forman un ángulo constante θ_0 con un vector v fijo".

    Muestre que $\dfrac{\tau}{\kappa}$ es constante.

12. Determine la ecuación del plano osculador y la torsión para la curva

$$\alpha(t) = \left(\arctan(t), -\frac{1}{1+t}, \ln(t+\sqrt{1+t^2})\right), t > -1,$$

en el punto donde el vector tangente a la curva tiene la dirección de la recta

$$L: \qquad x+1 = y-1 = z-2\,.$$

13. Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco con vector tangente unitario $T(s)$. Definimos la curva

$$\beta(t) = \int_a^t T(s) \times T'(s)\, ds\,.$$

Calcule la curvatura y torsión de β.

14. Demuestre que la curva $\lambda : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}^3$,

$$\lambda(t) = \left(\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{1}{1+t}\right)$$

es plana. Determine la ecuación del plano en que se encuentra.

15. Sea $\mathcal{C}$ la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + z = 1$.
    (a) Encuentre una parametrización para la curva $\mathcal{C}$.
    (b) Determine los puntos en la curva donde la curvatura es máxima y es mínima.

16. Considere la curva γ parametrizada por $r(t) = (t+2\,, 1-t\,, \frac{1}{2}\,t^2)$ con $-\infty < t < \infty$.
    (a) Demuestre que el plano osculador en cualquier punto en la curva es el mismo.
    (b) Calcule la torsión $\tau(s)$ de γ.

17. Considere la curva intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 = 2x \qquad \text{e} \qquad z^2 = x^2 + y^2$$

con $z \geq 0$. Hallar una parametrización de la curva y la ecuación del plano osculador en el punto $P(1, 1, \sqrt{2})$.

18. Demostrar que la curva de ecuación paramétrica

$$x = 3t^2 + 2t + 1\,, \qquad y = t^2 - 2t + 3\,, \quad z = 5t^2 - t - 2$$

es plana y encuentre la ecuación del plano que la contiene.

19. Un automovilista se desplaza por una carretera recta. En el instante $t = 0$ llega a una rotonda la que recorre con una trayectoria

$$\alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t(2-t)) \,, \qquad t \in [0, 2]$$

En el instante $t = 2$ sale de la rotonda y vuelve a continuar por una carretera recta.

(a) Calcule la curvatura máxima de la rotonda para $t \in [0, 2]$, ¿en qué punto ocurre?

(b) Determine la torsión de la rotonda para $t \in [0, 2]$. Haga un gráfico de la torsión en función del tiempo.