Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Segundo Semestre de 2024

Interrogación 3
Cálculo III - MAT 1630

1. Sea S la superficie formada al rotar alrededor del eje x la curva $y(x) = \cosh x$, con $0 \leq x \leq 1$. *Indicación: Se define* $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

   a) (20 puntos) Encuentre una parametrización para S.

   b) (40 puntos) Calcule el área de S.

2. (60 puntos) Considere la superficie por la siguiente parametrización:

$$S(\theta, \varphi) = ((3 + 2\cos(\varphi))\cos(\theta), (3 + 2\cos(\varphi))\sin(\theta), 2\sin(\varphi)),$$

   con $\theta \in [0, 2\pi)$ y $\varphi \in [0, 2\pi)$. Encuentre el plano tangente en el punto $\left(2\sqrt{3}, 2, \sqrt{3}\right)$.

3. (60 puntos) Considere S la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 3$ entre los planos $z = 0$ y $z = 4 - y$. Calcule

$$\iint_S (y + z) dA.$$

4. Considere las superficies S_1 y S_2 donde S_1 es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ entre los planos $z = -3$ y $z = 3$ y S_2 es la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ entre los planos $z = -3$ y $z = 3$.

   a) (30 puntos) Considere cualquier campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable. Muestre que si S_1 y S_2 son orientados de acuerdo a sus respectivas normales exteriores entonces

$$\iint_{S_1} \nabla \times F \cdot dA = \iint_{S_2} \nabla \times F \cdot dA.$$

b) (30 puntos) Considere $F(x, y, z) = (yz, xz, h(z))$, donde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable. Calcule

$$\iint_{S_1} \nabla \times F \cdot dA,$$

con S_1 orientado de acuerdo a la normal exterior.

5. (60 puntos) Calcule el flujo del campo $F(x, y, z) = (3xy^2, xe^z + 3yx^2, z^3)$ a través de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Tiempo: 2 horas

Solución Interrogación 3
Cálculo III - MAT 1630

1. *a*) Una parametrización para esta superficie de revolución es

$$(x, \cosh x \cos\theta, \cosh x \sin\theta) \; x \in [0,1], \; \theta \in [0, 2\pi)$$

b) Calculamos

$$\begin{aligned} T_x &= (1, \sinh x \cos\theta, \sinh x \sin\theta), \\ T_\theta &= (0, -\cosh x \sin\theta, \cosh x \cos\theta), \\ T_x \times T_\theta &= (\cosh x \sinh x, -\cosh x \cos\theta, -\cosh x \sin\theta) \\ \|T_x \times T_\theta\| &= \cosh x \sqrt{1 + \sinh^2 x} \end{aligned}$$

Acá $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Por lo tanto, el área está dada por

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \cosh x \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, d\theta dx = 2\pi \int_0^1 \cosh^2 x dx.$$

En la última linea usamos que $1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$. Como $\cosh^2 x = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{2}$ concluimos que

$$\text{Area} = \pi \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + x \right) \Big|_{x=0}^{1} = \left(\frac{e^2 - e^{-2}}{2} + 1 \right).$$

2. De acuerdo a la parametrización observamos que el punto $\left(2\sqrt{3}, 2, \sqrt{3}\right)$ ocurre si

$$2\sin(\varphi) = \sqrt{3}, \;\; (3 + 2\cos(\varphi))\sin(\theta) = 2 \text{ y } \;\; (3 + 2\cos(\varphi))\cos(\theta) = 2\sqrt{3}.$$

De la primera ecuación tenemos que $\varphi = \frac{\pi}{3}$, por lo tanto $(3 + 2\cos(\varphi)) = 4$ y $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$. Es decir, $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Calculamos los vectores tangentes en este punto:

$$\begin{aligned} T_\theta &= (-(3+2\cos(\varphi))\sin(\theta), (3+2\cos(\varphi))\cos(\theta), 0) \\ &= (-2, 2\sqrt{3}, 0) \\ T_\varphi &= (-2\sin(\varphi)\cos(\theta), -2\sin(\varphi)\sin(\theta), 2\cos\varphi) \\ &= \left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \\ T_\theta \times T_\varphi &= (2\sqrt{3}, 2, 4\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Este último es el vector normal al plano tangente, por lo tanto la ecuación buscada es

$$(2\sqrt{3}, 2, 4\sqrt{3}) \cdot (x - 2\sqrt{3}, y - 2, z - \sqrt{3}) = 0.$$

Equivalentemente,

$$\sqrt{3}x + y + 2\sqrt{3}z = 14.$$

3. Considere S la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 3$ entre los planos $z = 0$ y $z = 4 - y$. Calcule

$$\int_S (y + z) dA.$$

Empezamos por parametrizar el cilindro

$$r(\theta, t) = (\sqrt{3}\cos(\theta), \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\theta), t),$$

donde $\theta \in [0, 2\pi]$ y $t \in [0, 4 - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\theta)]$. Calculamos las tangentes (derivadas parciales)

$$\begin{aligned} T_\theta &= (-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\theta), \sqrt{3}\cos(\theta), 0) \\ T_t &= (0, 0, 1) \\ T_\theta \times T_t &= (\sqrt{3}\cos(\theta), \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\theta), 0) \\ \|T_\theta \times T_t\| &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Con esta informacion planteamos la integral doble

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{4-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\theta)}(\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\theta)+t)\sqrt{3}dtd\theta.$$

Su desarrollo paso a paso es

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{4-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\theta)}(\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\theta)+t)\sqrt{3}dtd\theta =$$
$$\int_0^{2\pi}3\,\mathrm{sen}(\theta)(4-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\theta))+\frac{(4-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\theta))^2}{2}\sqrt{3}dtd\theta =$$
$$\int_0^{2\pi}12\,\mathrm{sen}(\theta)-\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{sen}^2(\theta)+8\sqrt{3}-4\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\theta)d\theta =$$
$$-\frac{3\sqrt{3}}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2(\theta)d\theta+16\pi\sqrt{3} =$$
$$-\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi+16\pi\sqrt{3} =$$
$$\frac{29}{2}\sqrt{3}\pi,$$

donde usamos que $\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2(\theta)d\theta=\pi$.

4. *a*) Observamos que las superficies S_1 y S_2 tienen la misma frontera, con la misma orientación, si S_1 y S_2 son orientadas de acuerdo a la normal exterior. Por teorema de Stokes, ambas integrales coinciden,

   b) Por Stokes, tenemos basta calcular la integral de linea sobre la frontera. Esta frontera consta de dos circulos, uno es $x^2+y^2=25-3^2=16=4^2$ con $z=3$ y el otro con $z=-3$. Orientando de acuerdo a la normal exterior el primero esta parametrizado de la forma

$$r(\theta)=(4\cos(\theta),4\,\mathrm{sen}(\theta),3),$$

La integral de linea en ese primer circulo es

$$\int_0^{2\pi} (12\,\mathrm{sen}(\theta), 12\cos(\theta), h(z)) \cdot (-4\,\mathrm{sen}(\theta), 4\cos(\theta), 0) d\theta =$$
$$48 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) - \mathrm{sen}^2(\theta) =$$
$$48 \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) = 0.$$

En el otro circulo tenemos la parametrizacion

$$r(\theta) = (4\cos(-\theta), 4\,\mathrm{sen}(-\theta), -3) = (4\cos(\theta), -4\,\mathrm{sen}(\theta), -3),$$

La integral de linea es ahora

$$\int_0^{2\pi} (12\,\mathrm{sen}(\theta), -12\cos(\theta), h(z)) \cdot (-4\,\mathrm{sen}(\theta), -4\cos(\theta), 0) d\theta =$$
$$48 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) - \mathrm{sen}^2(\theta) =$$
$$48 \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) = 0.$$

Asi que la integral total es cero. Alternativamente se puede chequear que $\nabla \times F = (-x, y, 0)$. Podemos calcular la integral de flujo en el cilindro parametrizado como $r(\theta, t) = (4\cos(\theta), 4\,\mathrm{sen}(\theta), t)$. Recordando $T_\theta \times T_t = (4\cos(\theta), 4\,\mathrm{sen}(\theta), 0)$, tenemos la doble integral

$$\int_0^{2\pi} \int_{-3}^{3} (-4\cos(\theta), 4\,\mathrm{sen}(\theta), 0) \cdot (4\cos(\theta), 4\,\mathrm{sen}(\theta), 0) dt d\theta =$$
$$96 \int_0^{2\pi} -\cos^2(\theta) + \mathrm{sen}^2(\theta) =$$
$$96 \int_0^{2\pi} -\cos(2\theta) = 0$$

Otra solución:

Por la parte anterior, se tiene que

$$\iint_{S_1} \nabla \times F \cdot dA = \iint_{S_2} \nabla \times F \cdot dA.$$

Notemos que $S_2(\theta, z) = (4\cos\theta, 4\sin\theta, z)$ con $\theta \in [0, 2\pi)$ y $z \in [-3, 3]$. Tenemos que

$$\begin{aligned} T_\theta &= (-4\sin\theta, 4\cos\theta, 0) \\ T_z &= (0, 0, 1) \\ T_\theta \times t_z &= (4\cos\theta, 4\sin\theta, 0) \end{aligned}$$

Como

$$\nabla \times F = (-x, y, z - z),$$

La integral buscada es

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{-3}^{3} (-4\cos\theta, 4\sin\theta, 0) \cdot (4\cos\theta, 4\sin\theta, 0) dz d\theta \\ = -16 \times 2\pi \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta = 0 \end{aligned}$$

5. Calcule el flujo del campo $F(x, y, z) = (3xy^2, xe^z + 3yx^2, z^3)$ a través de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

   Usamos el teorema de la divergencia. Note the la divergencia es es $3y^2 + 3x^2 + 3x^2$. En coordenadas esfericas esto es igual a $3r^2$ asi que hacemos la integral triple en esfericas (recordar que $dV = r^2 \sin(\phi) dr d\phi d\theta$)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2} (3r^2) r^2 \sin(\phi) dr d\phi d\theta = 3\frac{32}{5} 2\pi \int_0^{\pi} \sin(\phi) d\phi \\ = 3\frac{32}{5} 2\pi 2 = \frac{384}{5}\pi. \end{aligned}$$