PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo Semestre 2022

Interrogación N. 3 MAT1630

1. Sea C la circunferencia unitaria centrada en el origen, orientada en el sentido antihorario. Calcule
$$\int_C \frac{1-2y}{x^2+(y-\frac{1}{2})^2}dx + \frac{2x}{x^2+(y-\frac{1}{2})^2}dy.$$

Solución: Se pide la integral de línea $\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ siendo

$$P(x,y) = \frac{1-2y}{x^2+(y-\frac{1}{2})^2} = \frac{-2(y-1/2)}{x^2+(y-\frac{1}{2})^2}, \quad Q(x,y) = \frac{2x}{x^2+(y-\frac{1}{2})^2},$$

y es fácil verificar que $Q_x = P_y$ para todo $(x,y) \neq (0,1/2)$. Sea

$$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\ ,\ (x^2+(y-1/2)^2 \geq 1/16\}.$$

Por el Teorema de Green,

$$0 = \iint_D (Q_x - P_y)dA = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

donde γ es la circunferencia de radio $1/4$ centrada en el punto $(0,1/2)$ orientada en el setido antihorario, es decir la curva $x^2+(y-\frac{1}{2})^2 = 1/16$. Así, se tiene que

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 16\int_\gamma (1-2y)dx + 2xdy.$$

Parametrizando γ por $x = (1/4)\cos(t),\ y = 1/2 + (1/4)\sin(t),\ t \in [0,2\pi]$, se tiene $dx = -(1/4)\sin(t)dt,\ dy = (1/4)\cos(t)dt$ y por lo tanto

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_0^{2\pi} (-2\sin(t)(-\sin(t)) + 2\cos^2(t))dt = \int_0^{2\pi} 2dt = 4\pi.$$

(Pueden considerarse distintas regiones D, pero debe estar escrita en qué región o regiones se usa Green y aplicarlo correctamente).

2. (a) Demuestre que para todo campo vectorial $\mathbf{F}$ en $\mathbb{R}^3$ con segundas derivadas continuas se tiene

$$\text{div}(\text{rot}(\mathbf{F})) = 0,$$

donde rot($\mathbf{F}$)=curl($\mathbf{F}$) es el rotor, rotacional, o curl de $\mathbf{F}$. Use lo anterior para demostrar que si $\mathbf{F}$=rot($\mathbf{G}$) + ∇h, con $\mathbf{G}$ un campo vectorial y $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ambos con segundas derivadas continuas, entonces

$$\text{div}(\mathbf{F}) = h_{xx} + h_{yy} + h_{zz}.$$

Solución: Escribiendo $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ se tiene que

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y),$$

luego

$$\text{div}(\text{rot}(\mathbf{F})) = R_{yx} - Q_{zx} + P_{zy} - R_{xy} + Q_{xz} - P_{yz}.$$

Como el campo es de clase C^2, por el Teorema de Clairaut las derivadas cruzadas son iguales y se tiene el resultado.

Ahora, Si $\mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{F}) + \nabla h$, por linealidad de tiene, usando el resultado anterior que

$$\text{div}(\text{rot}(\mathbf{F}) + \nabla h) = \text{div}(\text{rot}(\mathbf{F})) + \text{div}(\nabla h) = 0 + \text{div}(\nabla h) = h_{xx} + h_{yy} + h_{zz}.$$

(b) Calcule el área del trozo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que está en el interior de la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$.

Solución: Las esferas se intersectan a altura $z = 1/2$, luego la superficie pedida se puede parametrizar por $\vec{r}(\varphi, \theta) = (x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\varphi, \theta))$ donde

$$x = \sin(\varphi)\cos(\theta), \quad y = \sin(\varphi)\sin(\theta), \quad z = \cos(\varphi),$$

y como $z = 1/2$ corresponde a $\varphi = \pi/3$, $\varphi \in [0, \pi/3]$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Ahora

$$||\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta|| = \sin(\varphi),$$

luego

$$\begin{aligned} A(S) = \iint_{[0,\pi/3]\times[0,2\pi]} ||\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta|| d\theta \, d\varphi &= \iint_{[0,\pi/3]\times[0,2\pi]} \sin(\varphi) d\theta \, d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/3} \sin(\varphi) d\varphi \\ &= 2\pi(-\cos(\varphi)\Big|_0^{\pi/3}) = 2\pi(-1/2 + 1) = \pi. \end{aligned}$$

3. Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el plano $x + z = 5$ es tangente al paraboloide de ecuación $z = ax^2 + ay^2$.

   Solución: Parametrizamos la superficie con la ecuación $r(x, y) = (x, y, ax^2 + ay^2)$. Entonces el vector normal al plano tangente en un punto (x, y) es

   $$r_x \times r_y = (1, 0, 2ax) \times (0, 1, 2ay) = (-2ax, -2ay, 1)$$

   Para que el plano tangente sea $x + z = 5$, este vector debe ser un múltiplo de $(1, 0, 1)$, y como la última coordenada es igual entonces queda $-2ax = 1$ y $y = 0$.

   Es decir, el plano tangente a la superficie es paralelo al plano $x + z = 5$ en el punto $(-1/(2a), 0, 1/(4a))$. Si es exactamente ese plano, entonces $\frac{-1}{2a} + \frac{1}{4a} = 5 \implies a = -1/20$.

4. Sea S la superficie de revolución obtenida al girar la curva $y = x^2$, $x \in [0, 1]$, alrededor del eje x.

   (a) Encuentre una parametrización para S.

   Solución: S se parametriza por

   $$r(x, \theta) = (x, x^2 \cos(\theta), x^2 \sin(\theta)), \quad x \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$$

   (b) Calcule

   $$\iint_S \frac{yz}{\sqrt{1 + 4x^2}} dS$$

   Solución: Tenemos que

   $$\begin{aligned} \|r_x \times r_\theta\| &= \|(1, 2x\cos(\theta), 2x\sin(\theta)) \times (0, -x^2\sin(\theta), x^2\cos(\theta))\| \\ &= \|(2x^3, -x^2\cos(\theta), -x^2\sin(\theta))\| \\ &= x^2\sqrt{4x^2 + 1} \end{aligned}$$

   Entonces

   $$\begin{aligned} \iint_S \frac{yz}{\sqrt{1 + 4x^2}} dS &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{x^2\cos(\theta)x^2\sin(\theta)}{\sqrt{1 + 4x^2}} x^2\sqrt{4x^2 + 1} d\theta dx \\ &= \int_0^1 x^6 dx \int_0^{2\pi} \sin(\theta)\cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{7} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2\theta)}{2} d\theta = 0. \end{aligned}$$

Tiempo: 2 horas
No se permite el uso de apuntes ni formularios
No se permite el uso de calculadora