Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
8 de mayo de 2013

MAT1630 ⋆ Cálculo 3

Solución de la Interrogación # 2.

1. *a*) Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (u, v)$, donde $u = x + 1$, $v = x + y^3 + 1$. Determine los puntos (x, y) en torno a los cuales se puede definir F^{-1} y calcular

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$$

b) Verifique que el sistema

$$3x^2 + 2y^2 - 3xy + 4uv = 6$$
$$y^2 + v^2 - xv - yu = 0$$

define implícitamente

$$x = h_1(u, v), \quad y = h_2(u, v)$$

en algún entorno de $(1, 1, 1, 1)$ y calcule

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$$

Solución:

a) Por el Teorema de la Función Inversa existe una inversa local diferenciable alrededor de todo punto (x, y) en el cual $\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$. Por definición el determinante jacobiano es

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3y^2 \end{vmatrix} = 3y^2$$

Por tanto, la función F es invertible alrededor de todo (x, y) con $y \neq 0$.
Para hallar $\frac{\partial x}{\partial u}$ observamos que $x = u - 1$, por lo tanto $\frac{\partial x}{\partial u} = 1$,
y además $\frac{\partial x}{\partial v} = 0$.
Para hallar $\frac{\partial y}{\partial v}$ derivamos implicítamente la ecuación $v = x + y^3 + 1$ con respecto a v:

$$\frac{\partial v}{\partial v} = \frac{x + y^3 + 1}{\partial v} \Leftrightarrow 1 = \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v}(y^3) \Leftrightarrow 1 = 0 + 3\frac{\partial y}{\partial v} y^2$$

Por lo tanto $\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{3y^2}$
Para hallar $\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$ derivamos implicítamente la ecuacíon $v = x + y^3 + 1$ con respecto a u:

$$0 = \frac{\partial x}{\partial u} + 3\frac{\partial y}{\partial u} y^2 + 0 = 1 + 3\frac{\partial y}{\partial u} y^2$$

Entonces: $\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-1}{3y^2}$. Derivando otra respecto a u y usando la regla de la cadena junto con $\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-1}{3y^2}$ nos da

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = -\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial u}(\frac{1}{y^2}) = -\frac{1}{3}(-2)\frac{1}{y^3}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2}{9}\frac{1}{y^5}$$

b) Para comprobar que se puede despejar, formamos las ecucaiones

$$F_1(u,v,x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 3xy + 4uv - 6, \quad F_2(u,v,x,y) = y^2 + v^2 - xv - yu$$

y el determinante en $(1,1,1,1)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x - 3y & 4y - 3x \\ -v & 2y - u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

Como $\Delta \neq 0$, el teorema general de la función implícita nos asegura que es posible despejar.
Primero hallaramos $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$ y $y_u = \frac{\partial x}{\partial u}$ en $(u,v,x,y) = (1,1,1,1)$ derivando implicitamente:

$$\frac{F_1}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow 6xx_u + 4yy_u - 3xy_u - 3x_u y + 4v = 0$$

$$\frac{F_2}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow 2yy_u - vx_u - y_u u - y = 0$$

En $(1,1,1,1)$ este sistema simplifica en un sistema linear:

$$3x_u + y_u = -4, \quad -x_u + y_u = 1$$

con solución $x_u(1,1) = -5/4$ y $y_u(1,1) = -1/4$.
Para hallar $x_{uv} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$ primero tenemos que hallar $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$ y $y_v = \frac{\partial x}{\partial v}$ en $(1,1,1,1)$. Derivando implicitamente las ecuaciones $F_1 = 0$ y $F_2 = 0$ respecto a v nos da:

$$\begin{aligned} 6x_v x + 4yy_v - 3x_v y - 3xy_v + 4u = 0 \\ 2yy_v + 2v - x_v v - x - uy_v = 0 \end{aligned}$$

En $(1,1,1,1)$ este sistema simplifica en un sistema linear:

$$3x_v + y_v = -4, \quad -x_v + y_v = -1$$

con solución $x_v(1,1) = -3/4$ y $y_v(1,1) = -7/4$.
Ahora derivamos $\frac{F_1}{\partial u} = 0$ y $\frac{F_2}{\partial u} = 0$ (que ya hemos calculado arriba) respecto a v:

$$\frac{\partial}{\partial v}(\frac{F_1}{\partial u}) = 0 \Leftrightarrow 6x_v x_u + 6xx_{uv} + 4y_v y_u + 4yy_{uv} - 3x_v y_u - 3xy_{uv} - 3x_{uv} y - 3x_u y_v + 4 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\frac{F_2}{\partial u}) = 0 \Leftrightarrow 2y_v y_u + 2yy_{uv} - x_u - vx_{uv} - y_{uv} u - y_v = 0$$

En $(1,1,1,1)$ este sistema simplifica así (usando también los valores de x_u, x_v, y_u, y_v en $(1,1)$):

$$3x_{uv} + y_{uv} = -17/4, \quad -x_{uv} + y_{uv} = -62/16 \qquad .$$

con solución

$$x_{uv}(1,1) = -3/32, \quad y_{uv}(1,1) = -127/32 \qquad .$$

2. *a*) Determine los valores extremos de $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x + y^2$ sujeto a la condición $x^2 + y^2 = 1$.
   b) Encuentre los puntos de la superficie $z - 4x^2 - y^2 + 2 = 0$ más cercanos al origen.

Solución:

a) Para analizar la función f en el círculo unidad $x^2 + y^2 = 1$ aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange, resolviendo el sistema dado por

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

y la restricción $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Las dos primeras ecuaciones son

$$x^2 - \frac{1}{4} = 2\lambda x$$
$$2y = 2\lambda y$$

La segunda ecuación implica que $(1 - \lambda)y = 0$, por lo que $\lambda = 1$ o bien $y = 0$.
Si $\lambda = 1$, usando la primera ecuación, tenemos que $x^2 - 2x - \frac{1}{4} = 0$, luego

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+1}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Usando la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, tenemos

$$x = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 1 - (1 - \frac{\sqrt{5}}{2})^2 = \sqrt{5} - \frac{5}{4} > 0$$

$$x = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 1 - (1 + \frac{\sqrt{5}}{2})^2 = -\sqrt{5} - \frac{5}{4} < 0$$

Dado que la segunda desigualdad $y^2 < 0$ es imposible, el único valor de x es el primero. Así obtenemos los puntos

$$P_1 = (1 - \frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{(\sqrt{5} - \frac{5}{4})}), \quad . \quad \text{y } P_2 = (1 - \frac{\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{(\sqrt{5} - \frac{5}{4})}) \quad .$$

Si $y = 0$, entonces la ecuación de la restricción implica que $x^2 = 1$, lo que proporciona dos nuevos puntos:

$$P_3 = (1, -0) \quad \text{y } P_4 = (-1, 0) \quad .$$

Los valores de la función f en dichos puntos son

$$f(P_1) = f(P_2) = \frac{1 + 5\sqrt{5}}{12} \simeq 1.01503, \quad f(P_3) = \frac{1}{12}, \, f(P_4) = -\frac{1}{12}$$

luego el máximo absoluto de f se alcanza en P_1 y P_2, mientras que el mínimo absoluto de f se alcanza en P_4. .

.

b) Reformulamos el problema como el problema de encontrar los puntos mínimos de $f(x, y, z) = ||(x, y, z) - (0, 0, 0)||^2 = x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a la condición $g(x, y, z) = z - 4x^2 - y^2 + 2 = 0$.
Aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange. Se tiene que resolver el sistema dado por $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \wedge g(x, y, z) = 0$,

$$2x = -8\lambda x, \quad 2y = -2\lambda y, \quad 2z = \lambda,$$

y la restricción

$$z = 4x^2 + y^2 - 2$$

Es decir:

$$(1 + 4\lambda)x = 0, \quad (1 + \lambda)y = 0, \quad z = \lambda/2, \quad z = 4x^2 + y^2 - 2$$

Hay tres posibilidades: (i) $x = y = 0$, (ii) $x \neq 0$, (iii) $y \neq 0$.

El caso (i) corresponde al punto $P_1 := (0, 0, -2)$ (con $\lambda = -4$).

En el caso (ii) se tiene $x \neq 0 \Rightarrow 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1/4 \overset{(1+\lambda)y=0}{\Rightarrow} y = 0$. Tambien $z = \lambda/2 = -1/8$. Con la restricción $g(x, y, z) =$ obtenemos $4x^2 = 2 - 1/8 = 15/8$, así obtenemos los puntos

$$P_2 = (\sqrt{15/32}, 0, -1/8), \quad P_3 = (-\sqrt{15/32}, 0, -1/8)$$

En el caso (iii) se tiene $y \neq 0 \Rightarrow \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \overset{(1+4\lambda)x=0}{\Rightarrow} x = 0$. Tambien $z = \lambda/2 = -1/2$. Con la restricción $g(x, y, z) =$ obtenemos $y^2 = 2 - 1/2 = 3/2$, así obtenemos los puntos

$$P_4 = (0, \sqrt{3/2}, -1/2), \quad P_5 = (0, -\sqrt{3/2}, -1/2),$$

Los valores de la función f en dichos puntos son

$$f(P_1) = 4, \quad f(P_2) = f(P_3) = \frac{31}{64}, \quad f(P_4) = f(P_5) = \frac{7}{4}$$

luego P_2 y P_3 son los puntos de la superficie $z - 4x^2 - y^2 + 2 = 0$ más cercanos al origen.

3. Calcular

$$\iint_D y dx dy$$

si D es la región dada por

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \quad \wedge \quad x^2 + y^2 - y \leq 3/4\}$$

Solución:

Define los discos

$$D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad D_2 = \{(x, y) \mid x^2 + (y - 1/2)^2 \leq 1\}$$

La región D es la intersección de D_1 con D_2. Escribimos D como una región x-simple. Por esto vamos a calcularla intersección de las fronteras de D_1 y D_2:

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 - y = 3/4$$

Tomando la differencia: $y = 1 - 3/4 = 1/4$. Usando $x^2 = 1 - y^2 = 3/4$ da que las fronteras de D_1 y D_2 se intersectan en exactamente dos puntos:

$$(\sqrt{15}/4, 1/4) \quad \text{y} \quad (-\sqrt{15}/4, 1/4)$$

Se verifica que D es una región x-simple:

$$D = \{(x, y) \mid -\sqrt{15}/4 \leq x \leq \sqrt{15}/4, \quad \frac{1}{2} - \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\iint_D y dx dy &= \int_{-\sqrt{15}/4}^{\sqrt{15}/4}\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx = \int_{-\sqrt{15}/4}^{\sqrt{15}/4}[y^2/2]_{\frac{1}{2}-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= \int_{-\sqrt{15}/4}^{\sqrt{15}/4}(\frac{1-x^2}{2} - \frac{(\frac{1}{2}-\sqrt{1-x^2})^2}{2})dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{15}/4}^{\sqrt{15}/4}(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4})dx = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x - \frac{1}{4}x]_{-\sqrt{15}/4}^{\sqrt{15}/4} \\ &= \frac{1}{2}\arcsin(\frac{\sqrt{15}}{4}) - \frac{\sqrt{15}}{32}\end{aligned}$$

4. Calcular el volumen del sólido interior al cilindro $x^2+y^2 = 2ax$ ($a > 0$ una constante) comprendido entre el plano xy y el cono $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$.

   Solución:

   Usando coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta, \quad z = z$$

   la ecuación del cilindro es $r^2 = 2ar\cos\theta \Leftrightarrow r = 2a\cos\theta$, donde $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. El interior del cilindro verifica $0 \leq r \leq 2a\cos\theta$. La ecuación de la parte superior ($z \geq 0$) del cono $z^2 = x^2 + y^2$ es $z = r$, por lo que $0 \leq z \leq r$. Entonces el sólido es dado por

$$V = \{(r,\theta,z) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 2a\cos\theta, \quad 0 \leq z \leq r\}$$

   Como el jacobiano del cambio de coordenadas es r, el volumen es

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(V) &= \iiint_V dx dy dz = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{2a\cos\theta}\int_0^r r dz\, dr\, d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\theta} r^2 dr\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[r^3/3]_0^{2a\cos\theta}d\theta = \frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta \\ &= \frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta(1-\operatorname{sen}^2\theta)d\theta = \frac{8a^3}{3}[\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{8a^3}{3}(2-\frac{2}{3}) = \frac{32a^3}{9}\end{aligned}$$