Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo II
Segundo Semestre 2025

Ayudantía 9

Regla de la cadena, derivación implícita y vector gradiente.

Problema 1

Encuentre las derivadas parciales de forma implícita.

- $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z = z(x, y)$
- $\sin(xz) + \cos(yz) = 0$ con $z = z(x, y)$

Problema 2

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas. Consideremos los puntos

$$A(1, 3), \qquad B(3, 3), \qquad C(1, 7), \qquad D(6, 15).$$

La derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ es 3 y la derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AC}$ es 26. Determine la derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AD}$.

Problema 3

Demuestre que cualquier función de la forma

$$z = f(x + \alpha t) + g(x - \alpha t)$$

es una solución a la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Problema 4*

Considere una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable cerca de un punto (x_0, y_0), tal que $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$

a) Demuestre que $\nabla f(x_0, y_0)$ es normal a la curva de nivel $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = f(x_0, y_0)\}$ en (x_0, y_0).

b) Demuestre que $\nabla f(x_0, y_0)$ apunta en la dirección máximo crecimiento.

Extra: Explique geométricamente, por qué al aplicar una restricción $g(x, y) = 0$, el punto donde $\nabla g \parallel \nabla f$ es un máximo o mínimo de f en la restricción.

Problema 5 (Propuesto)

En una región la temperatura está dada por $T(x, y, z)$ que varía de acuerdo a las siguientes ecuaciones:

$$T_x = 3x, \quad T_y = \frac{y}{(z+1)^2}, \quad T_z = \frac{-y^2}{(z+1)^3}.$$

Un objeto recorre la curva $c(t) = (t^2, -t, t^3)$ para $t \in (0, 2)$. Determine la variación de la temperatura del objeto $\frac{dT}{dt}$ a lo largo de la curva (como función de t).