Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
MAT1620 - Cálculo II - Sección 2 - 2014-02
Profesor: José López

Ayudantía I

Sólidos de revolución y Longitud de Arco

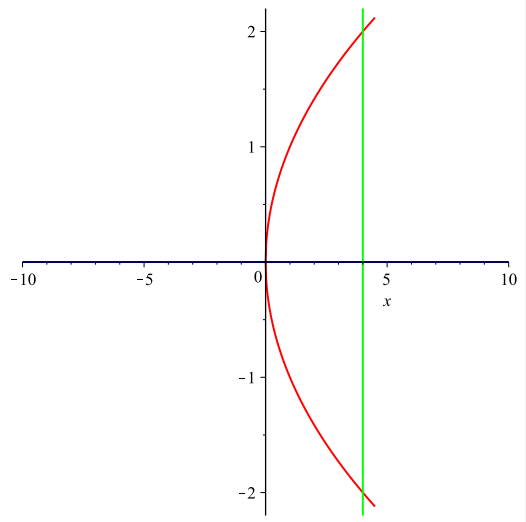
Ayudante: Daniel Araya - dtaraya@uc.cl

Problemas

Problema 1

Encuentre, mediante el método de las Arandelas o de los Discos, el volumen del sólido de revolución generado al girar, alrededor de la recta $x = 4$ la región limitada por la curva $x = y^2$, el eje x y la recta $x = 4$.

Solución Alternativa: Mediante el método de Arandelas Vemos que la región a trabajar corresponde:



Una alternativa correspondería trasladar las funciones de modo que la recta $x = 4$ corresponda al eje y, así podremos utilizar el método de las Arandelas (o de los Discos) que conocemos. De acuerdo a esto nuestra función f(x) a trabajar sería: $f(x) = \sqrt{x+4}$ o bien su inversa $f^{-1}(y) = y^2 - 4$.
La ventaja de utilizar este método radica en que utilizamos la misma variable con respecto al eje de giro, es decir, en algunos de los casos tendremos que despejar la función con respecto a la otra variable (la variable dependiente) y luego operar. Esto puede facilitarnos o dificultarnos el cálculo de la integral.
Utilizando la transformación anterior, claramente como giramos entornos al eje y utilizaremos la función $g(y) = f^{-1}(y) = y^2 - 4$ con $y \in [0, 2]$. Así mediante una *revolución vertical*, utilizando el *método de las Arandelas* tenemos que:

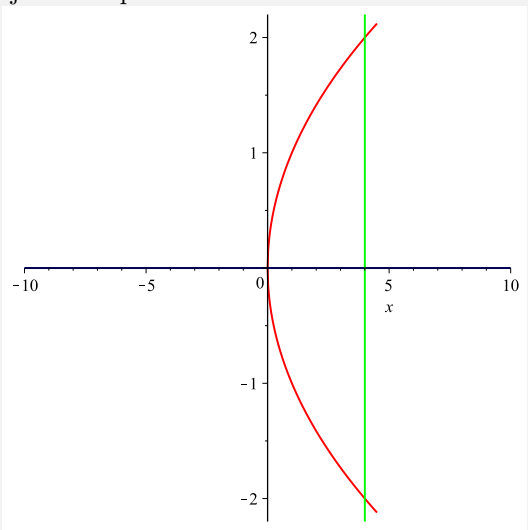
$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi g^2(y)\, dy \\ &= \int_0^2 \pi (y^2-4)^2\, dy \\ &= \pi \int_0^2 (y^4 - 8y^2 + 16)\, dy \\ &= \pi \left(\frac{y^5}{5} - \frac{8y^3}{3} + 16y \right) \Big|_0^2 \\ &= \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 \right) \\ &= \frac{256\pi}{15} \end{aligned}$$

Concluyendo lo pedido. ■

Problema 2

Resuelva el problema anterior mediante el método de los Cascarones Cilíndricos.

Solución Alternativa:
Vemos que la región a trabajar corresponde:



Una alternativa correspondería trasladar las funciones de modo que la recta $x = 4$ corresponda al eje y, así podremos utilizar el método de Cascarones Cilíndricos o Arandelas (o de los discos) que conocemos. De acuerdo a esto nuestra función f(x) a trabajar sería: $f(x) = \sqrt{x+4}$ o bien su inversa $f^{-1}(y) = y^2 - 4$.

Mediante el método de los Cascarones Cilíndricos:
La ventaja de utilizar el método de los Cascarones Cilínricos radica a que utilizamos la misma variable en que se expresa la función, es decir, la variable independiente, sin necesidar de despejar la función con respecto a la variable dependiente (considerando a que estamos girando con respecto al mismo eje de la variable dependiente).
Sabiendo esto, tenemos todo lo necesario pues la función a tratar es $f(x) = \sqrt{x+4}$ con $x \in [-4, 0]$:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-4}^{0} 2\pi |x| f(x)\, dx \\
&= \int_{-4}^{0} 2\pi |x| \sqrt{x+4}\, dx \qquad\qquad x+4 = u \to dx = du \\
&= \int_{0}^{4} 2\pi |u-4| \sqrt{u}\, du \\
&= \int_{0}^{4} 2\pi (4-u) \sqrt{u}\, du \\
&= 2\pi \int_{0}^{4} 4u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}\, du \\
&= 2\pi \left(\frac{8}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_{0}^{4} \\
&= 2\pi \left(\frac{64}{3} - \frac{64}{5} \right) \\
&= \frac{256\pi}{15}
\end{aligned}
$$

Concluyendo lo pedido.

Problema 3

Se sabe que la forma que dan los cable que penden entre dos postes es una catenaria de ecuación cosenoidal hiperbólica. Los postes se encuentran separados 300 m y el punto más bajo se encuentra 200 m. El eje y atraviesa la catenaria por su punto más bajo que nombramos anteriormente y el eje x se encuentra justamente a la altura del suelo, en la base de los postes. Las situación anterior se describe con la función:

$$y = 200\cosh\left(\frac{x}{200}\right)$$

Determine la longitud del cable entre los postes.

Solución:
Sabemos que

$$L = \int_{x_i}^{x_f} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Como $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{senh}\left(\dfrac{x}{200}\right)$:

$$\begin{aligned}
L &= \int_{-150}^{150} \sqrt{1 + \left(\operatorname{senh}\left(\frac{x}{200}\right)\right)^2}\, dx \\
&= \int_{-150}^{150} \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{200}\right)}\, dx \\
&= \int_{-150}^{150} \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{200}\right)}\, dx \\
&= \int_{-150}^{150} \cosh\left(\frac{x}{200}\right)\, dx \qquad\qquad u = \frac{x}{200} \to du = \frac{dx}{200} \\
&= 200\int_{-3/4}^{3/4} \cosh(u)\, du \\
&= 200\sinh(u)\Big|_{-3/4}^{3/4} \\
&= 400\sinh(3/4)
\end{aligned}$$

Concluyendo lo pedido. ■

Problema 4

Hallar el volumen del anillo sólido que se genera al hacer girar en torno al eje de ordenadas la porción de plano encerrada por la elipse de ecuación:

$$\frac{(x-7)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Solución:
Resolvamoslo mediante el método de los Disco o Arandelas: Vemos que la figura está compuesta por la funciones $x_1 = 7 - \frac{5}{3}\sqrt{9-y^2}$ y $x_2 = 7 + \frac{5}{3}\sqrt{9-y^2}$ con $y \in [-3, 3]$.
Luego la integral a resolver es:

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-3}^{3} \pi({x_2}^2 - {x_1}^2)\, dy \\
&= 2\int_{0}^{3} \pi({x_2}^2 - {x_1}^2)\, dy \\
&= 2\pi \int_{0}^{3} \pi(2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \frac{5}{3}\sqrt{9-y^2})\, dy \\
&= \frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \pi}{3} \int_{0}^{3} \sqrt{9-y^2})\, dy \qquad\qquad y = 3\sin(t) \to dy = 3\cos(t)\, dt \\
&= \frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \pi}{3} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 9\cos^2(t)\, dt \\
&= 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \pi \cdot 3 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\, dt \\
&= 4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \pi \cdot 3 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2t))\, dt \\
&= 210\pi^2
\end{aligned}$$

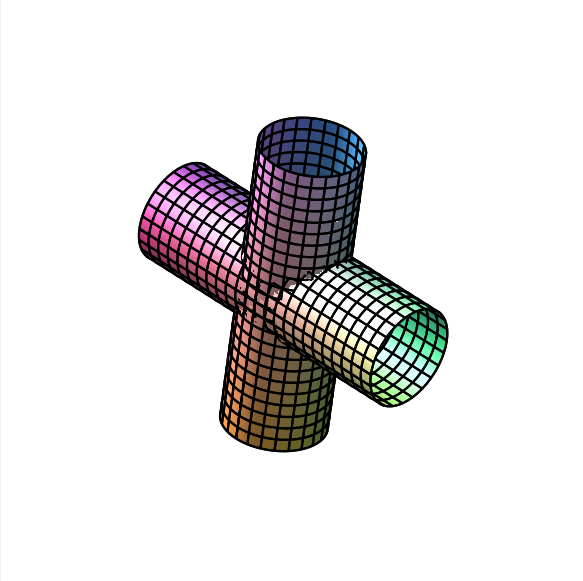
Concluyendo lo pedido. ■

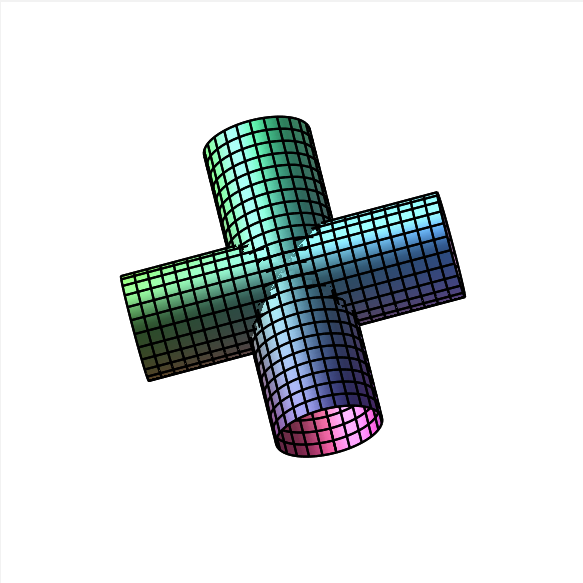
Problema 5 (Clásico de Clásicos)

Encuentre el volumen formado por la intersección perpendicular de 2 cilindros de radio 1, cuyos ejes son coplanares. Es decir, la intersección entre:

$$C_1 = \{(x, y, z) |\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$
$$C_2 = \{(x, y, z) |\, x^2 + z^2 \leq 1\}$$

Solución:
La figura es:





La forma de la intersección de por si puede que sea difícil de imaginar detalladamente, sin embargo podemos intuir una evidente simetría.
La clave de este ejercicio es notar que las secciones transversales formadas son **cuadrados**, de ahí es evidente el trabajo a realizar.
Tenemos dos alternativas:
Opción 1: Tener una buena imaginación espacial y darse cuenta que las secciones transversales son cuadrados.
Opción 2: Trabajar algebraicamente y darse cuenta que las secciones son cuadrados.

Sin embargo independiente de cual sea la opción, debemos realizar la Opción 2 si o si para tener los datos necesarios para poder obtener numéricamente el valor del volumen deseado. Las Opción 1 simplemente nos ayuda saber qué estamos buscando.

Notemos que:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 1 \\ y^2 &\leq 1 - x^2 \\ \Rightarrow -\sqrt{1-x^2} \leq y &\leq \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Del mismo modo concluimos con z:

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 &\leq 1 \\ \Rightarrow -\sqrt{1-x^2} \leq z &\leq \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Luego es evidente que se trata de un cuadrado de lado $2\sqrt{1-x^2}$
Luego el volumen deseado es:

$$\begin{aligned} V &= \int A(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} (2\sqrt{1-x^2})^2\,dx \\ &= 4\int_{-1}^{1} 1 - x^2\,dx \\ &= 4\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} \\ \Rightarrow V &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Concluyendo lo pedido. ■