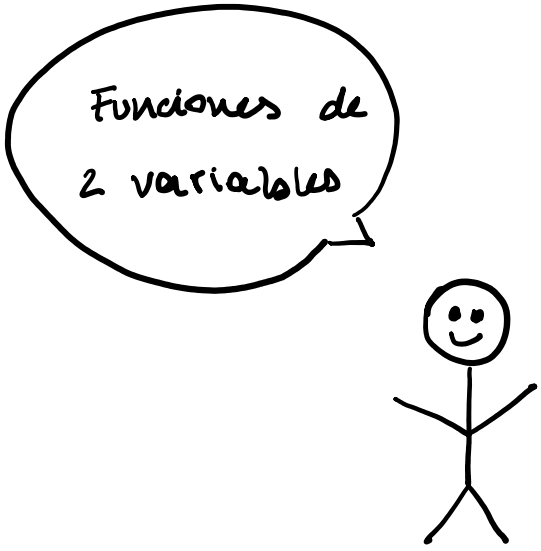
Ayudantía 7

isabel.kreimerman@gmail.com



Problema 1

Sea $F(x,y) = 1 + \sqrt{4-y^2}$

a) Evalúe $F(3,1)$.

b) Determine y trace el dominio de F.

c) Determine el rango de F.

a) evaluamos $F(x=3, y=1) = 1 + \sqrt{4-1^2}$

$= 1 + \sqrt{3}$

b) El dominio serán todos los (x,y) tal que $F(x,y)$ exista. Entonces, notamos que:

→ No tenemos restricciones para x

→ la raíz debe existir

$$4 - y^2 \geq 0$$
$$4 \geq y^2$$
$$-2 \leq y \leq 2$$

entonces, el dominio es $\{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, -2 \leq y \leq 2\}$

c) el rango son los valores que toma la función. Notamos que

$\sqrt{4-y^2}$

su valor mínimo es 0

se mayor valor es 2

entonces el rango es $[1,3]$

Problema 2

Determine y grafique el dominio de las siguientes funciones:

- $f(x,y) = \sqrt{y} + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$
- $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

a) $f(x,y) = \sqrt{y} + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

Se debe cumplir que las raíces existan, entonces:

$y \geq 0$ (condición 1)

$25 - x^2 - y^2 \geq 0$

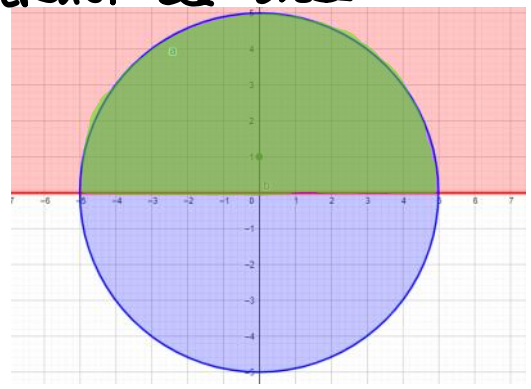
$25 \geq x^2 + y^2$ (condición 2)

entonces el dominio es

$\{(x,y) \mid y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 25\}$

Así, la condición 1 nos dibuja el interior de una esfera. Mientras que la condición 2 nos dice que $y \geq 0$

Entonces el dominio esta en verde



b) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

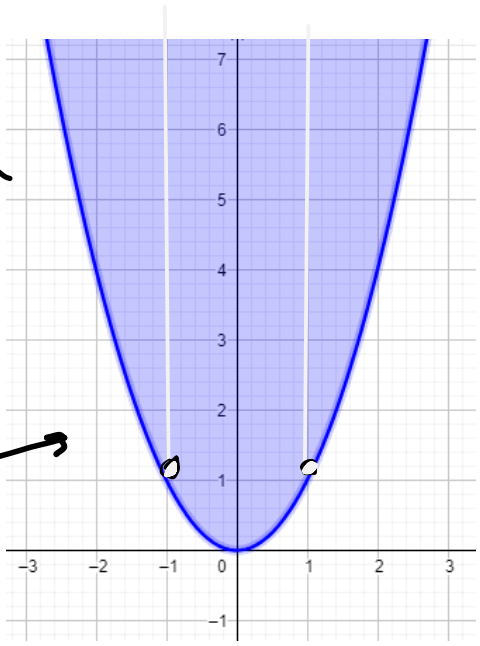
Se debe cumplir que la raíz exista y que el denominador NO sea cero.

$y - x^2 \geq 0$

$y \geq x^2$ (condición 1)

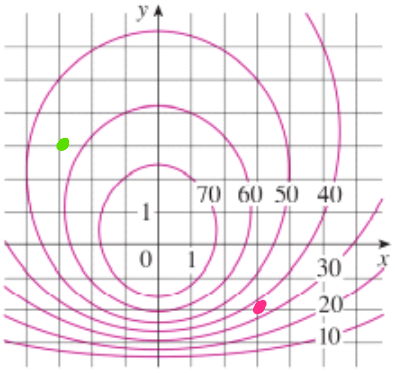
$$1 - x^2 \neq 0$$
$$1 \neq x^2$$
$$x \neq 1 \ \wedge \ x \neq -1 \quad \text{(condición 2)}$$

Entonces, de la condicion 1, se obtiene el interior de una parabola y de la condicion 2, se le eliminan los $x=1$, $x=-1$ lo que resalta en este dibujo



Problema 3

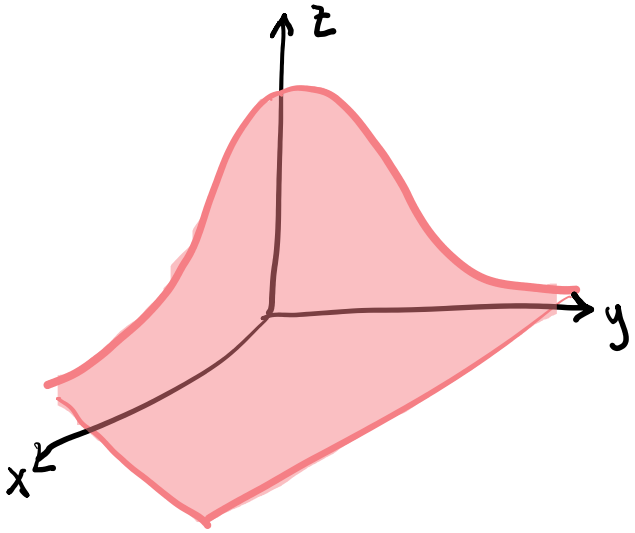
Se proporciona un mapa de contorno para una función f. Con éste estime los valores de $f(-3,3)$ y $f(3,-2)$. ¿Qué puede decir respecto a la forma de la gráfica?



El valor aproximado de $f(-3,3)$ es ≈ 56

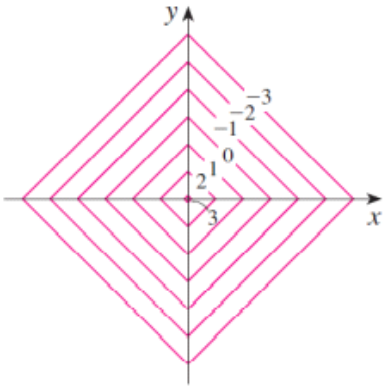
El valor aproximado de $f(3,-2)$ es ≈ 33

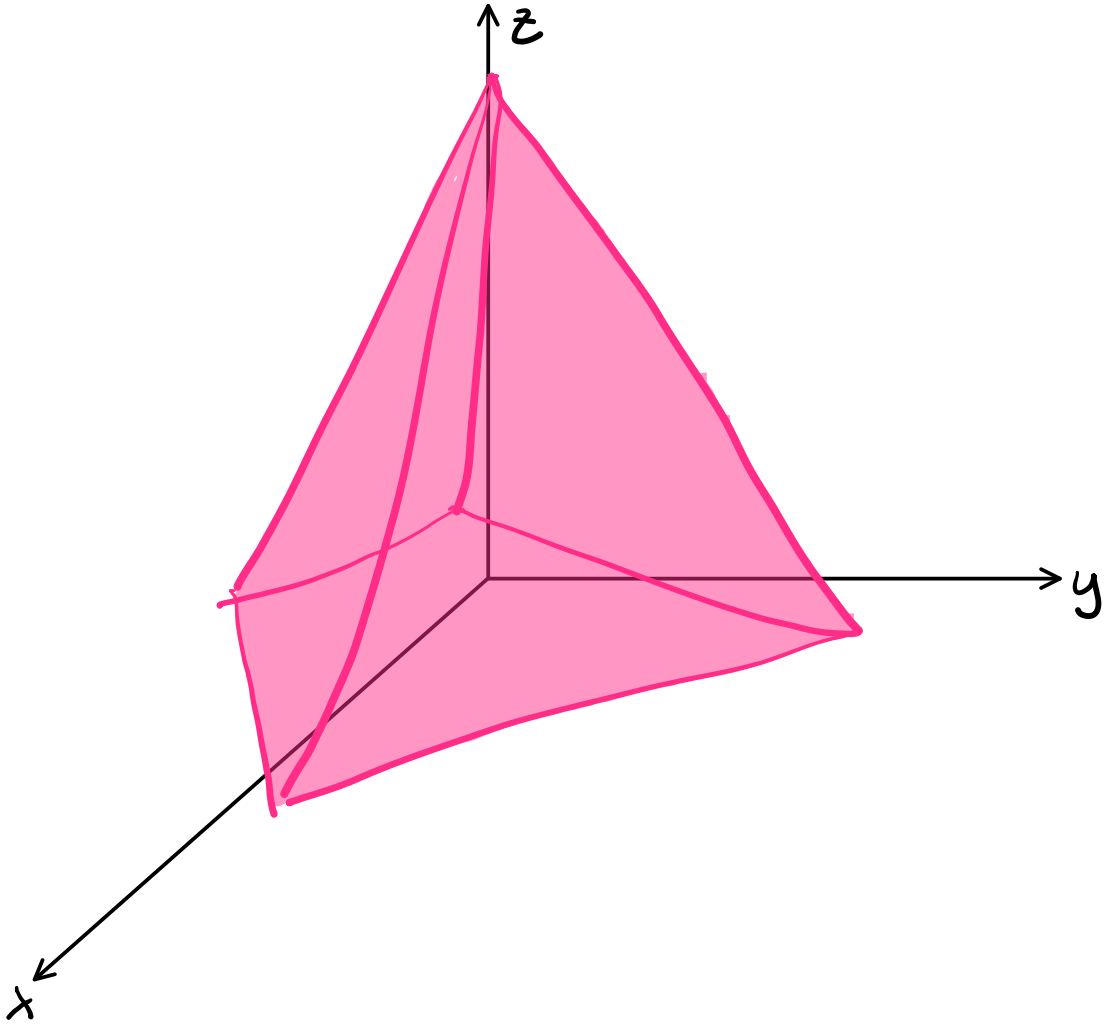
Respecto a la grafica, podemos notar que el valor de las curvas de nivel va descendiendo a medida que se aleja del "circulo central" por lo que la grafica se ve algo asi:



Problema 4

Se muestra un mapa de contorno de una función f. Apóyese en él para elaborar un esquema aproximado de la gráfica de f.





Problema 5

Dibuje un mapa de contorno de la función mostrando varias curvas de nivel.

- $f(x,y) = (y-2x)^2$
- $f(x,y) = x^3 - y$

Recordamos

Definición Las **curvas de nivel** de una función f de dos variables son las curvas cuyas ecuaciones son $f(x, y) = k$, donde k es una constante (en el rango de f).

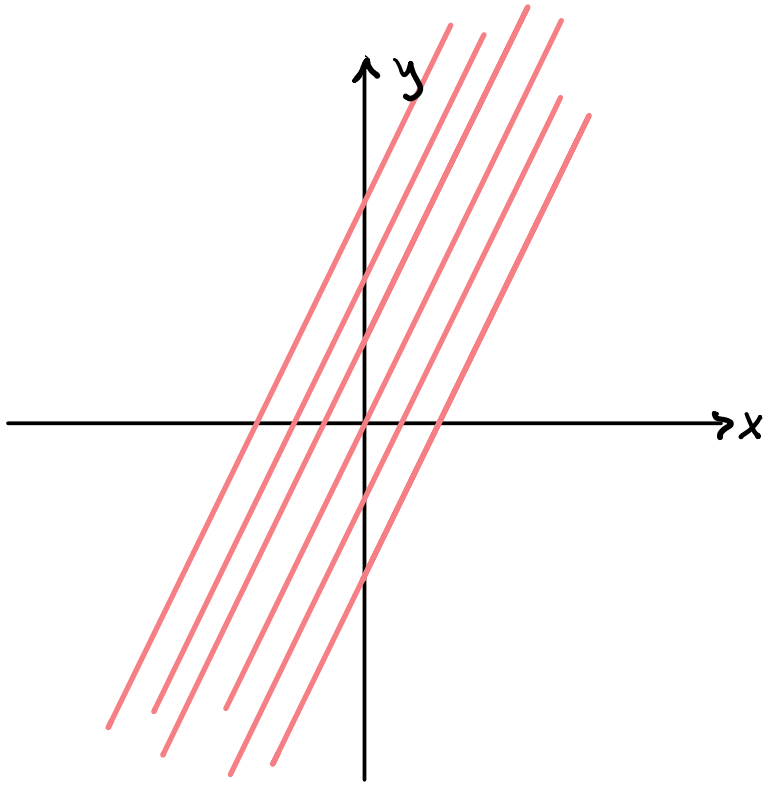
$f(x,y) = (y-2x)^2$

$(y-2x)^2 = k$

$y - 2x = \pm\sqrt{k} = \pm k$ (la raíz de una cte es cte)

$y - 2x = \pm k$

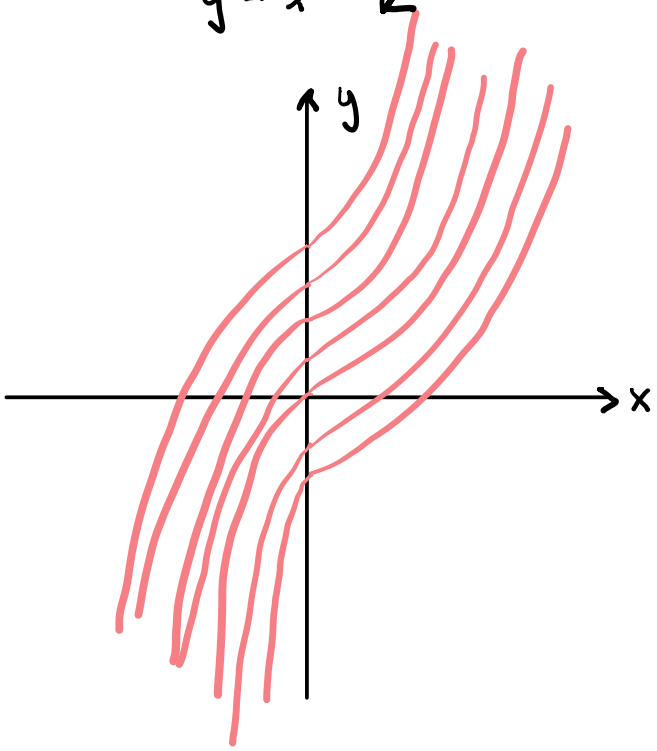
$y = 2x \pm k$ → rectas de pendiente 2



$f(x,y) = x^3 - y$

$x^3 - y = k$

$y = x^3 - k$



Problema 6

Determine el límite, si existe, o demuestre que no existe.

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2 \operatorname{sen}^2(x)}{x^4+y^4}$
- $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{xy-y}{(x-1)^2+y^2}$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \sin^2(x)}{x^4+y^4}$$

probamos con la recta $y=mx$ (que pasa por $(0,0)$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{m^2x^2 \sin^2(x)}{x^4(1+m^4)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{m^2 \sin^2(x)}{(1+m^4)x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{m^2}{1+m^4}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$$

$$= \frac{m^2}{1+m^4}$$

como el valor del límite depende de m, el límite NO existe

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2}$$

factorizamos $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$

reemplazamos $x-1=r\cos(\theta)$ $y=r\sin(\theta)$

con este reemplazo hacemos que $r\to 0$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\sin(\theta)\cdot r\cos(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))} \quad (\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1)$$

$$= \cos(\theta)\sin(\theta)$$

como el valor depende del valor de θ, entonces el límite NO existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Usamos coordenadas polares

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\sin(\theta)$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta)\cdot r\sin(\theta)}{\sqrt{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sqrt{r^2(\underbrace{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}_{1})}}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sqrt{r^2}}$$

$$\lim_{r\to 0} r\cos(\theta)\sin(\theta) = 0$$

como el límite vale 0 independiente del valor de θ, podemos afirmar que el límite existe y vale 0

Problema 7

Mediante coordenadas polares determine el límite. [Si (r, θ)] son las coordenadas polares del punto (x, y) con $r \geq 0$, observe que $r \longrightarrow 0^+$ cuando $(x, y) \longrightarrow (0, 0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$$

Usamos coordenadas polares

$x = r\cos(\theta)$ $\quad y = r\sin(\theta)$

$$\lim_{r\to 0} (r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)) \ln\left(r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)\right)$$

$$\lim_{r\to 0} r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)) \ln\left(r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))\right)$$

$$\lim_{r\to 0} r^2 \ln(r^2) = \lim_{r\to 0} \frac{\ln(r^2)}{\frac{1}{r^2}}$$

($r^2 \to 0$, $\ln(r^2) \to \infty$)

Usamos L'Hopital

$$\lim_{r\to 0} \frac{2r}{r^2} \cdot \frac{1}{\frac{-2}{r^3}}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{2r}{r^2} \cdot \frac{-r^3}{2}$$

$$\lim_{r\to 0} -r^2 = 0$$