Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
MAT1620 - Cálculo II - Sección 2 - 2014-02
Profesor: José López

Ayudantía V

Integrales Impropias

Ayudante: Daniel Araya - dtaraya@uc.cl

Preposiciones

Preposición 1

Las siguientes integrales cumplen con la siguiente propiedad:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \quad : \quad \begin{cases} Converge & p > 1 \\ Diverge & p \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^\infty e^{-ax}\,dx \quad : \quad \begin{cases} Converge & a > 0 \\ Diverge & a \leq 0 \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx \ \vee \ \int_a^b \frac{1}{(x-b)^p}\,dx \quad : \quad \begin{cases} Diverge & p \geq 1 \\ Converge & p < 1 \end{cases}$$

Criterio de comparación

Sean $0 < f(x) \leq g(x)$ con $f(x)$ y $g(x)$ continuas en su dominio. Luego en las siguientes integrales impropias tipo I y II se cumple:

$$Si \quad \int g(x)\,dx \ converge \Rightarrow \int f(x)\,dx \ converge$$

$$Si \quad \int f(x)\,dx \ diverge \Rightarrow \int g(x)\,dx \ diverge$$

Criterio del paso al límite

Sean $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ en su dominio y sea límite en el punto conflictivo $A = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ donde x_0 es el punto conflictivo. Luego se cumple que si:

$$A \neq 0 \Rightarrow \int f(x)\,dx \quad converge \Leftrightarrow \int g(x)\,dx \quad converge$$

$$A = 0 \Rightarrow \int f(x)\,dx \quad diverge \Rightarrow \int g(x)\,dx \quad diverge$$

$$A = \infty \Rightarrow \int f(x)\,dx \quad converge \Rightarrow \int g(x)\,dx \quad converge$$

Teorema

Para toda integral impropia (Tipo I y II), se cumple:

$$\int |f(x)|\,dx \quad converge \Rightarrow \int f(x)\,dx \quad converge$$

OBSERVACIÓN:
Procurar respetar muy bien el sentido de las Equivalencias (⇔) e Implicancias (⇒), es vital entender su interpretación y significado.

Problemas

Problema 1

Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias:

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos(x)}$

   Solución:
   ¿Problemas? En $x = \dfrac{\pi}{2}$
   Notemos que $\cos(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \approx \dfrac{\pi}{2} - x$ cerca de $x = \dfrac{\pi}{2}$. Así por criterio del paso al límite:

   $$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\cos(x)}}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = 1$$

   Luego como $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\frac{\pi}{2} - x}$ diverge (pues es una integral del tipo II y $p = 1 \geq 1$), $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos(x)}$ diverge. ■

2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \cos^4 x}$

   Solución:
   ¿Problemas? Sólo en el infinito.
   Notemos que $0 \leq \cos(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^n(x) \leq 1$ para $n \geq 0$.

   $$\Rightarrow \quad x^2 + \cos^4(x) \geq x^2 \geq 0$$
   $$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{x^2 + \cos^4(x)}$$

   Cómo $p = 2 > 1$, por *criterio de comparación*: $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \cos^4 x}$ converge. ■

3. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 - \cos^4 x}$

Solución:
¿Problemas? Sólo en el infinito.
Notemos que $\frac{x^2}{2} \geq 1 \geq \cos^4(x)$, para $x > 2$. *(Pregunta, ¿por qué utilizar* $\frac{x^2}{2}$ *y no simplemente* x^2 *?)*

$$\Rightarrow \quad -\frac{x^2}{2} \leq -\cos^4(x)$$
$$\Rightarrow \quad x^2 - \frac{x^2}{2} \leq x^2 - \cos^4(x), \quad \rightarrow \quad \textit{¿Ahora se entiende por qué se utilizó } \frac{x^2}{2} \textit{ ?}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x^2 - \cos^4(x)} \leq \frac{2}{x^2}.$$

Luego como $\int_2^\infty \frac{2}{x^2}\,dx$ converge (*pues* $p > 1$) $\Rightarrow \int_2^\infty \frac{dx}{x^2 - \cos^4 x}$ converge. ■

4. $\int_1^\infty \frac{x^2}{x^{\frac{7}{2}} + 1}\,dx$

Solución:
¿Problemas? Sólo en el infinito.
Notemos que $\frac{x^2}{x^{\frac{7}{2}} + 1} \leq \frac{x^2}{x^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.
Luego como $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ converge (*pues* $p = \frac{3}{2} > 1$) $\Rightarrow \int_1^\infty \frac{x^2}{x^{\frac{7}{2}} + 1}\,dx$ converge. ■

5. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 1}$

Solución:
Se resuelve análogo al anterior, pues $\frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{x^2}$. Luego converge. ■

6. $\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$

Solución:
¿Problemas? En 0.
Notemos que $\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right|$.
Luego como $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge (*pues* $p = \frac{1}{2} < 1$) $\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$ converge. ■

7. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$

Solución:
¿Problemas? En 1 y 2.
Conviene analizar por separado:
$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} = \int_1^a \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}}_{\alpha} dx + \int_a^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}}_{\beta} dx$ para algún $a \in (1,2)$
Luego la integral impropia completa converge *ssi cada integral impropia converge*. Notemos que:

$$\text{Cerca de 1:} \quad \alpha \sim \frac{1}{\sqrt{(x-1)}}$$
$$\text{Cerca de 2:} \quad \beta \sim \frac{1}{\sqrt{(2-x)}}$$

Luego por *criterio del paso al límite*:

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}}{\alpha} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{(2-x)}} = 1$$
$$B = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}}{\beta} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{(x-1)}} = 1$$

Luego como $A \neq 0 \neq \infty$ tenemos que $\int_1^a \frac{1}{\sqrt{(x-1)}}\,dx$ converge $\Leftrightarrow$ $\int_1^a \alpha\,dx$ converge.
Análogamente como $B \neq 0 \neq \infty$ tenemos que $\int_a^2 \frac{1}{\sqrt{(2-x)}}\,dx$ converge $\Leftrightarrow \int_a^2 \beta\,dx$ converge.
Finalmente como $\int_1^a \alpha\,dx$ y $\int_a^2 \beta\,dx$ convergen, $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$ converge. ■

8. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x|x-2|}}$

Solución:
¿Problemas? En $x = 0$ y $x = 2$.
Al igual que el problema anterior conviene analizar la integral por separado:
$I = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x|x-2|}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x|x-2|}} + \int_a^2 \frac{dx}{\sqrt{x|x-2|}} + \int_2^b \frac{dx}{\sqrt{x|x-2|}} + \int_b^\infty \frac{dx}{\sqrt{x|x-2|}}$ con $a \in (0,2)$ y $b \in (2,\infty)$
Sin embargo sería muy tedioso realizar 4 análisis, es por ello que conviene sospechar si alguna de las integrales diverge, pues en caso de encontrar al menos una, la integral completa diverge.
Fijemosnos en la cuarta integral: *En el infinito* $\frac{1}{\sqrt{x|x-2|}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^2}} \sim \frac{1}{x}$.
Por *criterio del paso al límite:*

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x|x-2|}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x-2}{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = 1$$

Luego como $\int_b^\infty \frac{dx}{x}$ diverge, $\int_b^\infty \frac{dx}{\sqrt{x|x-2|}}$ diverge (pues $A \neq 0 \neq \infty$) y así I diverge. ■

9. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}$

Solución:
¿Problemas? En $x = 1$
Al igual que la integral **1.**:

$$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right) \geq \frac{\pi}{2}(1-x)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\frac{\pi}{2}(1-x)} \geq \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

Luego como $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{\pi}{2}(1-x)}}$ converge (pues $p < 1$) $\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}$ converge. ■

10. $\int_0^1 \frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{3}}}\, dx$

Solución:
¿Problemas? En $x = 1$

Notemos que *cerca de* $x = 1$: $\dfrac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{3}}} \sim \dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{5}{3}}} = \dfrac{1}{((1-x)(1+x))^{\frac{5}{3}}} \sim \dfrac{1}{(2(1-x))^{\frac{5}{3}}} \sim \dfrac{1}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}$

Por *criterio del paso al límite*:

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{3}}}}{\dfrac{1}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2}{(1+x)^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{2}$$

Luego como $p = \dfrac{5}{3} > 1 \to \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{3}}}\,dx$ diverge. ■

11. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\ln(x)}$

Solución:
¿Problemas? En el infinito.

Realizando el siguiente cambio de variable: $u = \ln(x) \to du = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\ln(x)} = \int_0^\infty \frac{du}{u}$ que es la integral armónica, la cual diverge. ■

12. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{2x(\ln x)^a}$

Solución:
¿Problemas? En el infinito.

Al igual que la integral anterior, hacemos el siguiente cambio de variable: $u = \ln(x)$.

Así $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{2x(\ln x)^a} = \int_{\ln(2)}^\infty \frac{du}{2u^a} \Rightarrow$ converge *ssi* $a > 1$. ■

13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

Solución:
¿Problemas? En $x = 0$ y $x = 1$.
Tenemos que

$$I = I_1 + I_2$$
$$I = \int_0^a \underbrace{\frac{\ln(x)}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}}_{\alpha}\, dx + \int_a^1 \underbrace{\frac{\ln(x)}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}}_{\beta}\, dx \qquad \text{Para álgun } a \in (0,1)$$

Notar que en los respectivos puntos de conflicto:

$$\alpha \sim \ln(x)$$
$$\beta \sim \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$$

Luego por *criterio del paso al límite*:

$$A_1 = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\ln(x)}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}}{\ln(x)} = 1$$
$$A_2 = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{\ln(x)}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}} = 0$$

Luego como I_1 e I_2 divergen ($p \geq 1$), I diverge. ■

14. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\sin(x-1)|}{|x-1|^{\frac{3}{2}}}\, dx$

Solución:
¿Problemas? En $x = 1$ e infinito.
Tenemos que

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$
$$I = \int_0^1 \frac{|\sin(x-1)|}{|x-1|^{\frac{3}{2}}}\,dx + \int_1^2 \frac{|\sin(x-1)|}{|x-1|^{\frac{3}{2}}}\,dx + \int_2^\infty \frac{|\sin(x-1)|}{|x-1|^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

En I_1: $\dfrac{|\sin(x-1)|}{|x-1|^{\frac{3}{2}}} \sim \dfrac{|x-1|}{|x-1|^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{|x-1|^{\frac{1}{2}}}$

Por el *criterio del paso al límite*: $A_1 = \lim_{x\to 1} \dfrac{\dfrac{|\sin(x-1)|}{|x-1|^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{1}{|x-1|^{\frac{1}{2}}}} = \lim_{x\to 1} \dfrac{|\sin(x-1)|}{|x-1|} = 1$

En I_2: Análogo, obtendríamos el mismo resultado.
En I_3: Cuando $x \to \infty$

$$f(x) = \frac{|\sin(x-1)|}{|x-1|^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{que converge (pues } p > 1)$$

Luego cómo I_1, I_2 e I_3 convergen, I converge. ■

15. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$

Solución:
¿Problemas? En $x = 1$.
Notemos que cerca de $x = 1$

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-x^3}} \sim \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \sim \frac{1}{1-x}, \qquad \text{pues } 1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$$

Luego por *criterio del paso al límite*:

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{e^x}{\sqrt{1-x^3}}}{\dfrac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1} \frac{e^x}{\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{e}{\sqrt{3}}$$

Como $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ converge $\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$ converge. ■

16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}\,dx$

¡PROPUESTO!: Converge.

17. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p + x^{\frac{1}{p}}}$

¡PROPUESTO!: Se debe analizar por casos.
- Para $p > 1$ converge.
- Para $0 < p < 1$ converge.
- Para $p = 1$ diverge.
- Para $p < 0$ diverge.

18. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x^{\frac{3}{2}}(1+\sqrt{x})}\,dx$

Clásico de clásicos

Solución:
¿Problemas? En $x = 0$ y $x \to \infty$ Vemos que

$$I = \underbrace{\int_0^a \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x^{\frac{3}{2}}(1+\sqrt{x})}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_a^\infty \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x^{\frac{3}{2}}(1+\sqrt{x})}\,dx}_{I_2}$$

con $a \in (0, \infty)$.

I) Notemos que cerca de cero: $1 - \cos x \approx \dfrac{x^2}{2}$. Así cerca de cero:

$$\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x^{\frac{3}{2}}(1+\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x^{\frac{3}{2}}} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Luego como

$$A = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x^{\frac{3}{2}}(1+\sqrt{x})}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Como $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge, I_1 converge.

II) Trivialmente vemos que en el infinito: $0 \leq \sqrt{1-\cos x} \leq 1$. Luego por criterio de comparación concluimos que I_2 converge pues:

$$\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x^{\frac{3}{2}}(1+\sqrt{x})} \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

Y sabemos que $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^2}$ converge (pues $p = 2 > 1$)

Luego I converge. ■

Problema 2

Estudie la convergencia de

$$\int_0^\infty \frac{x^{2p-4}}{(x^3+3)^{\frac{11}{3}}}\,dx$$

Solución:
¿Donde hay Problemas? Sólo en el infinito. Luego la Integral Impropia es del Tipo I. Con mucha practica uno debería notar que este problema se puede ataca con cualquiera de los criterios estudiados. A continuación lo resolveré por ambos métodos:

1) **Por Criterio de Comparación:** Notemos que <u>en el infinito</u> (Siempre hay que mirar en el lugar que hay problemas) se cumple que:

$$\begin{aligned} x^3+3 &\geq x^3 > 0 \\ (x^3+3)^{\frac{11}{3}} &\geq x^{11} \\ \frac{1}{x^{11}} &\geq \frac{1}{(x^3+3)^{\frac{11}{3}}} \\ \frac{x^{2p-4}}{x^{11}} &\geq \frac{x^{2p-4}}{(x^3+3)^{\frac{11}{3}}} \\ \frac{1}{x^{15-2p}} &\geq \frac{x^{2p-4}}{(x^3+3)^{\frac{11}{3}}} \end{aligned}$$

Notar que, sin importar el p, x^{2p-4} en el infinito es mayor a 0:

Luego $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{2p-4}}{(x^3+3)^{\frac{11}{3}}}\,dx$ converge sólo si $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^{15-2p}}\,dx$ converge, y eso ocurre *ssi* (por criterio de la Integral-p para Integrales tipo I):

$$\begin{aligned} &15-2p>1 \\ \Leftrightarrow\ &\boxed{\text{p<7}} \end{aligned}$$

Concluyendo lo pedido.■

2) **Por Criterio por paso al Límite:**

Podemos decir que en el infinito de la expresión $\dfrac{x^{2p-4}}{(x^3+3)^{\frac{11}{3}}}$ los únicos elementos que aportan a la convergencia/divergencia son las variables independientes x's, es decir la constante $+3$ del denominador es insignificante en el infinito, luego decimos que:

$$\frac{x^{2p-4}}{(x^3+3)^{\frac{11}{3}}} \sim \frac{x^{2p-4}}{(x^3)^{\frac{11}{3}}} = \frac{1}{x^{15-2p}}$$

Luego por criterio del paso al límite tenemos:

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x^{2p-4}}{(x^3+3)^{\frac{11}{3}}}}{\dfrac{1}{x^{15-2p}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{11}}{(x^3+3)^{\frac{11}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\dfrac{(x^3+3)^{\frac{11}{3}}}{x^{11}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{3}{x^3})^{\frac{11}{3}}} = 1$$

Luego, como $A \neq 0 \neq \infty$, tenemos que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{2p-4}}{(x^3+3)^{\frac{11}{3}}}\,dx$ converge *ssi* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^{15-2p}}\,dx$ converge que ocurre *ssi*:

$$\begin{aligned} &15-2p>1 \\ \Leftrightarrow\ &\boxed{\text{p<7}} \end{aligned}$$

Obteniendo el mismo resultado. ■