Suponiendo que las derivadas parciales de f son continuas y que $z = f(x,y)$ el **plano tangente** en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Aproximación lineal

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

incremento

Si $z = f(x,y)$, entonces f es **diferenciable** en (a,b) si Δz se puede expresar de la forma

$$\Delta z = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$

AKA

Si las derivadas parciales f_x y f_y existen cerca de (a,b) y son continuas en (a,b) entonces f es diferenciable en (a,b)

PROARTE

CamScanner

1a) $z = 3y^2 - 2x^2 + x \quad (2,-1,-3)$

$z = f(x,y)$

$f_x = -4x + 1 \qquad f_y = 6y$

$f_x(2,-1,-3) = -7 \qquad f_y(2,-1,-3) = -6$

entonces el plano será

$$z - (-3) = -7(x-2) + 6(y+1)$$

1b) $z = 3(x-1)^2 + 2(y+3)^2 + 7 \quad (2,-2,12)$

$z = f(x,y)$

$f_x = 6(x-1) \qquad f_y = 4(y+3)$

$f_x(2,-2,12) = 6 \qquad f_y(2,-2,12) = 4$

entonces el plano sera

$$z - 12 = 6(x-2) + 4(y-(-2))$$

1c) $z = \sqrt{xy} \quad (1,1,1)$

$z = f(x,y)$

$f_x = \frac{1}{2}(xy)^{-1/2} \cdot y \qquad f_y = \frac{1}{2}(xy)^{-1/2} \cdot x$

$f_x(1,1,1) = \frac{1}{2} \qquad f_y(1,1,1) = \frac{1}{2}$

entonces el plano sera

$$z - 1 = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1)$$

1d) $z = x e^{xy} \quad (2,0,2)$

$z = f(x,y)$

$f_x = e^{xy} + xy e^{xy} \qquad f_y = x^2 e^{xy}$

$f_x(2,0,2) = 1 + 0 = 1 \qquad f_y(2,0,2) = 4 \cdot 1 = 4$

PROARTE

CamScanner

entonces el plano sera

$$z - 2 = 1(x-2) + 1(y-0)$$

1e) $z = x\sin(x+y) \qquad (-1,0,1)$

$$z = f(x,y)$$

$$fx = \sin(x+y) + x\cos(x+y) \qquad fy = x\cos(x+y)$$

$$fx(-1,0,1) = \sin(-1) + \cos(-1) \qquad fy = -\cos(-1)$$

entonces el plano sera

$$z - 1 = (\sin(-1) - \cos(-1))(x+1) + -\cos(-1)(y-0)$$

1f) $z = \ln(x-2y) \qquad (3,1,0)$

$$z = f(x,y)$$

$$fx = \frac{1}{x-2y} \qquad fy = \frac{-2}{x-2y}$$

$$fx(3,1,0) = 1 \qquad fy(3,1,0) = -2$$

entonces el plano sera

$$z - 0 = 1(x-3) - 2(y-1)$$

2a) Para que sea diferenciable, las derivadas parciales deben existir y ser continuas en el punto

$f_x = 3x^2y^4$ → continua en el pto
→ existe en el pto y vale 3

→ continua en el pto
→ existe en el pto y vale 4

∴ es diferenciable

y la linealización

$$L(x,y) = 1 + 3(x-1) + 4(y-1)$$

2b) $f_x = \frac{(x+y) - x \cdot 1}{(x+y)^2}$ → continua en el pto
→ existe en el pto y vale $\frac{1}{9}$

$= \frac{y}{(x+y)^2}$

$f_y = \frac{-x}{(x+y)^2}$ → continua en el pto
→ existe en el pto y vale $-\frac{2}{9}$

∴ es diferenciable

y la linealización

$$L(x,y) = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}(x-2) - \frac{2}{9}(y-1)$$

PROVAR

CamScanner

3a) $f(0,0) = 3$ $\quad f_x = \frac{2}{4y+1}$ $\quad f_x(0,0) = 2$

$f_y = \frac{2x+3}{(4y+1)^2} \cdot 4$ $\quad f_y(0,0) = -12$

entonces la aproximación lineal

$\approx 3 + 2(x-0) - 12(y-0)$ ✓✓

3b) $f(0,0) = 1$ $\quad f_x = \frac{1}{2}(y+\cos^2(x))^{-1/2} \cdot 2\cos(x)\cdot\sin(x)$ $\quad f_x(0,0) = 0$

$f_y = \frac{1}{2}(y+\cos^2(x))^{-1/2}$ $\quad f_y(0,0) = \frac{1}{2}$

entonces la aproximación lineal

$\approx 1 + 0\cdot(x-0) + \frac{1}{2}(y-0)$ ✓

4) Dados los datos, la aproximación lineal es:

$f \approx 6 + 1(x-2) - 1(y-5)$

$\approx 6 + x - 2 - y + 5$

$\approx x - y + 9$

$f(2.2, 4.9) \approx 2{,}2 - 4{,}9 + 9 \approx 6{,}3$

5) $f(x,y) = 1 - xy\cos(\pi y)$ $\quad (1,1)$ $\quad f(1.02, 0.97)$

$f_x = -y\cos(\pi y)$ $\quad f_x(1,1) = +1$

$f_y = -x\cos(\pi y) + xy\sin(\pi y)\cdot\pi$ $\quad f_y(1,1) = 1 + 0 = 1$

entonces la aprox. lineal

PROARTE

CamScanner

$$f \approx 2 + (x-1) + (y-1)$$
$$\approx 2 + x - 1 + y - 1$$
$$\approx x + y$$

$$f(1.02, 0.97) \approx +1{,}02 + 0{,}97$$
$$\approx 1{,}99$$

6) $f(3,2,6) = 7$

$$f_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$f_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$f_x(3,2,6) = \frac{3}{7}$ $\quad f_y(3,2,6) = \frac{2}{7}$ $\quad f_z = (3,2,6) = \frac{6}{7}$

Aproximación lineal

$$f \approx 7 + \frac{3}{7}(x-3) + \frac{2}{7}(y-2) + \frac{6}{7}(z-6)$$

Y buscamos $f(3.02, 1.97, 5.99)$

$$f(3.02, 1.97, 5.99) \approx 6{,}991$$