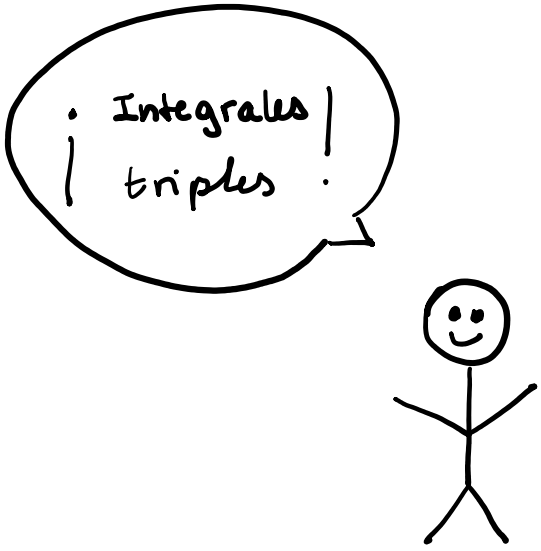
Ayudantía 13

isabel.kreimerman@gmail.com

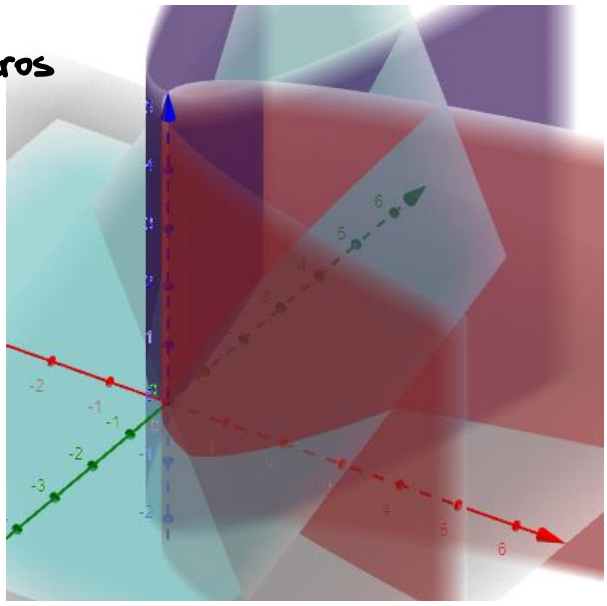


Problema 1

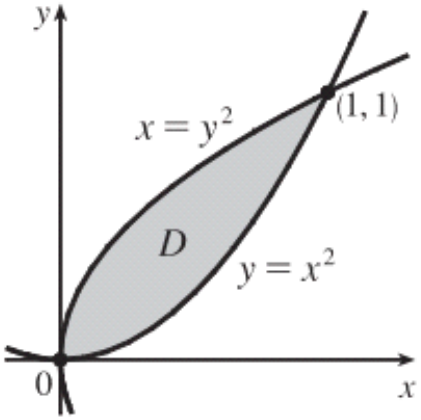
a) Evalúe $\iiint_E xy\,dV$ donde E esta acotada por los cilindros parabolicos $y = x^2$, $x = y^2$ y los planos $z = 0$, $z = x + y$

b) Use un integral triple para calcular el volumen del solido encerrado por los paraboloides $y = x^2 + z^2$, $y = 8 - x^2 - z^2$

a) E es la intersección de los cilindros parabolicos y los planos.



Tomando en cuenta que los planos son $z=0$ $z=x+y$ resulta util ver la region en el plano xy



En base a esto podemos facilmente escribir la integral como:

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^{x+y} xy \; dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xyz \Big|_0^{x+y} dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy(x+y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2y + y^2\, dy\, dx = \int_0^1 x^2 \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} + \frac{y^3}{3}\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{3}x^{5/2} - \frac{1}{3}x^7\, dx$$

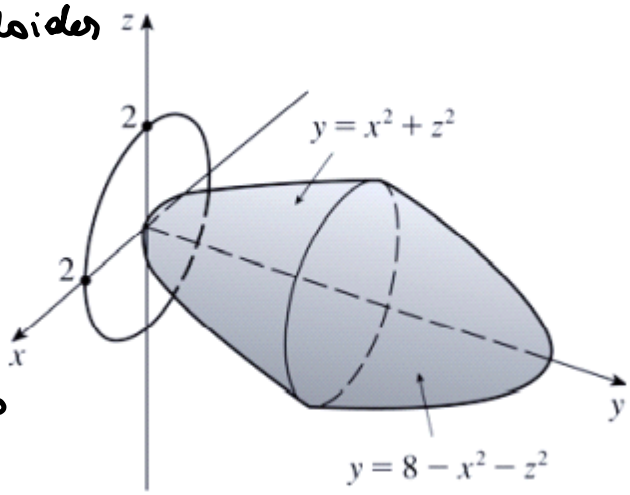
$$= \left[\frac{1}{8}x^4 + \frac{2}{21}x^{9/2} - \frac{1}{14}x^7 - \frac{1}{24}x^8\right]\Big|_0^1 = \frac{3}{28}$$

b) La intersección de los paraboloides se da cuando

$$8 - x^2 - z^2 = x^2 + z^2$$

$$8 = 2(x^2 + z^2)$$

$$x^2 + z^2 = 4$$



entonces la proyección en el plano xz es un disco $x^2 + z^2 \leq 4$ al que llamaremos D.

Notamos que $E = \{(x,y,z) \mid x^2 + z^2 \leq y \leq 8 - x^2 - z^2 \ , \ x^2 + z^2 \leq 4\}$

Notar que $\iiint_E dV = \iint_D \int_{x^2+z^2}^{8-x^2-z^2} dy \, dA$ donde D es el disco ya mencionado el cual es sencillo de integrar con coordenadas polares

$$\iint_D \int_{x^2+z^2}^{8-x^2-z^2} dy \, dA = \iint_D (8 - x^2 - z^2) - (x^2 + z^2) \, dA$$

$$= \iint_D 8 - 2(x^2 + z^2) \, dA \qquad \text{con} \quad \begin{matrix} x = r\cos(\theta) \\ z = r\sin(\theta) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 \leq r \leq 2 \\ r \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (8 - 2r^2) \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^2 8r - 2r^3 \, dr$$

$$= 2\pi \cdot \left(4r^2 \Big|_0^2 - \frac{1}{2} r^4 \Big|_0^2 \right)$$

$$= 2\pi (16 - 8) = 16\pi$$

$= 2\pi \cdot \left(4r^2 \Big|_0 - \frac{1}{2} r^4 \Big|_0 \right)$

$= 2\pi \left(16 - 8 \right) = \boxed{16\pi}$

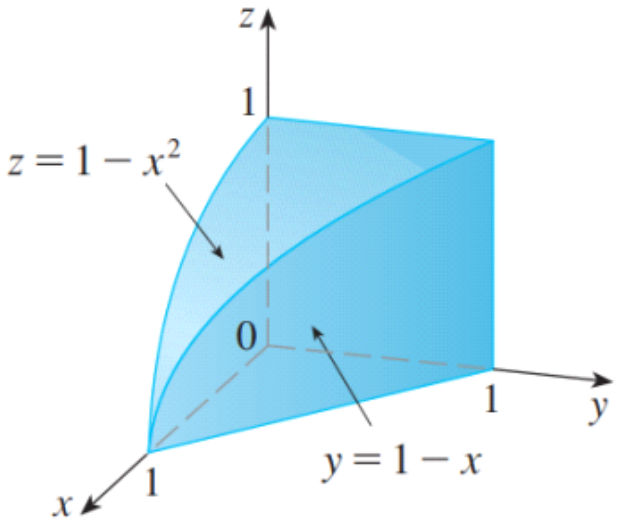
Problema 2

a) Exprese en seis formas distintas la integral $\iiint_E f(x,y,z)\,dV$ como una integral iterada, donde E es el sólido acotado por $y = x^2$, $z = 0$, $y + 2z = 4$

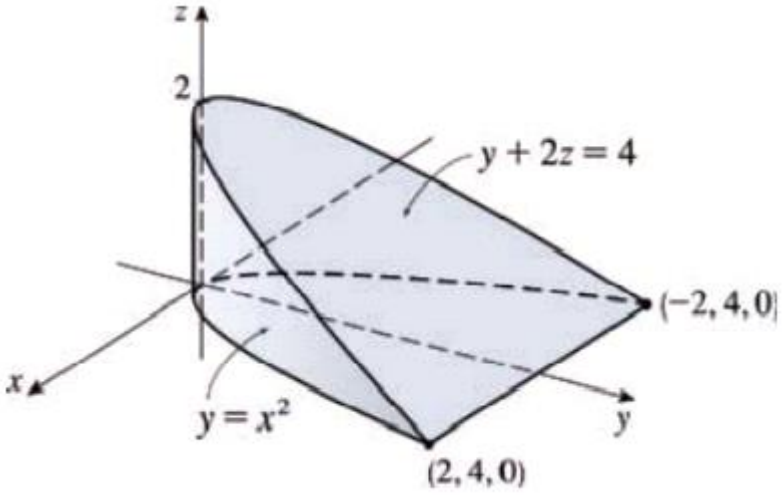
b) La figura muestra la región de integración para la integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$$

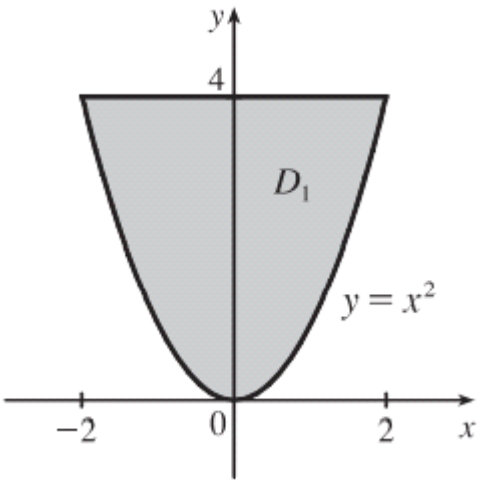
Reescriba en los otros cinco órdenes esta integral como una integral iterada equivalente.



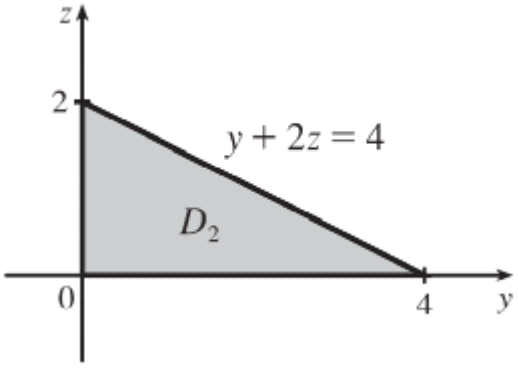
a) El solido corresponde a



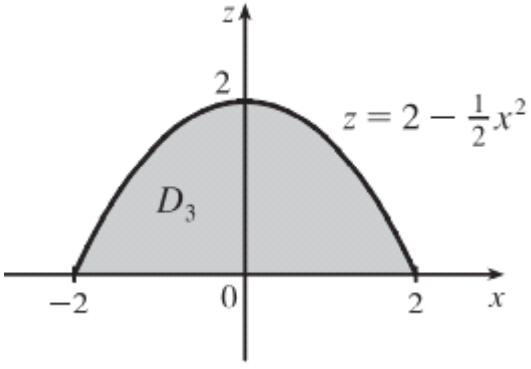
y sus proyecciones en los distintos planos son



$$D_1 = \{(x,y) \mid -2 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 4\}$$
$$D_1 = \{(x,y) \mid -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y},\ 0 \le y \le 4\}$$



$$D_2 = \{(y,z) \mid 0 \le y \le 4,\ 0 \le z \le 2 - \tfrac{1}{2}y\}$$
$$D_2 = \{(y,z) \mid 0 \le z \le 2,\ 0 \le y \le 4 - 2z\}$$



$$D_3 = \{(x,z) \mid -2 \le x \le 2,\ 0 \le z \le 2 - \tfrac{1}{2}x^2\}$$
$$D_3 = \{(x,z) \mid 0 \le z \le 2,\ -\sqrt{4-2z} \le x \le \sqrt{4-2z}\}$$

Entonces la región E se puede expresar como:

$$E = \{(x,y,z) \mid -2 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 4,\ 0 \le z \le 2 - \tfrac{1}{2}y\}$$
$$\{(x,y,z) \mid 0 \le y \le 4,\ -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y},\ 0 \le z \le 2 - \tfrac{1}{2}y\}$$
$$\{(x,y,z) \mid 0 \le y \le 4,\ 0 \le z \le 2 - \tfrac{1}{2}y,\ -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}\}$$
$$\{(x,y,z) \mid 0 \le z \le 2,\ 0 \le y \le 4 - 2z,\ -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}\}$$
$$\{(x,y,z) \mid -2 \le x \le 2,\ 0 \le z \le 2 - \tfrac{1}{2}x^2,\ x^2 \le y \le 4 - 2z\}$$
$$\{(x,y,z) \mid 0 \le z \le 2,\ -\sqrt{4-2z} \le x \le \sqrt{4-2z},\ x^2 \le y \le 4 - 2z\}$$

Entonces

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{2-\frac{1}{2}y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{0}^{2-\frac{1}{2}y} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

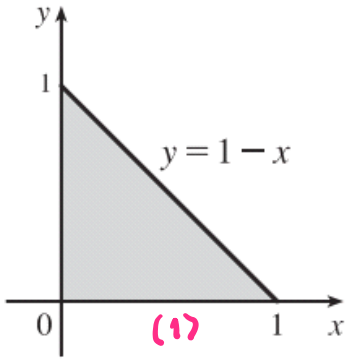
$$= \int_{0}^{4}\int_{0}^{2-\frac{1}{2}y}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$$

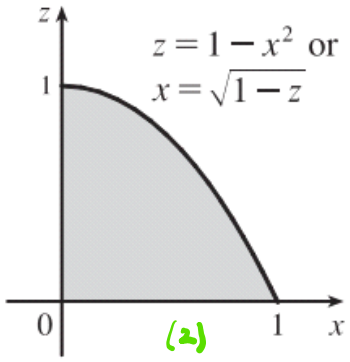
$$= \int_{0}^{2}\int_{0}^{4-2z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

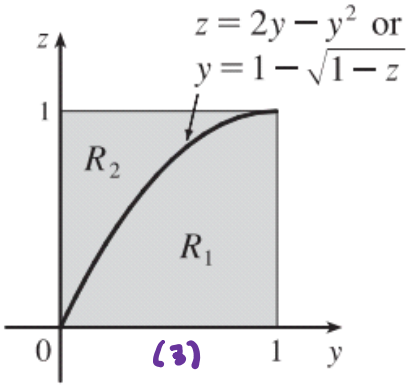
$$= \int_{-2}^{2}\int_{0}^{2-\frac{1}{2}x^2}\int_{x^2}^{4-2z} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$$

$$= \int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{4-2z}}^{\sqrt{4-2z}}\int_{x^2}^{4-2z} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$$

b) de manera analoga al ítem a) veremos las proyecciones en los distintos planos







de las primeras dos proyecciones se tiene

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x,y,z)\, dy\, dz\, dx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} \int_0^{1-x} f(x,y,z)\, dy\, dx\, dz \quad (2)$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-x^2} f(x,y,z)\, dz\, dx\, dy \quad (1)$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x^2} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx \quad (1)$$

Sin embargo notamos que la ultima proyeccion (3) es atravesada por $z = 2y - y^2$ por lo que lo dividimos en dos regiones. Asi, tambien podemos expresar la integral como

$$\int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{1-z}} \int_0^{\sqrt{1-z}} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz + \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-z}}^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2y-y^2} \int_0^{1-y} f(x,y,z)\, dx\, dz\, dy + \int_0^1 \int_{2y-y^2}^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} f(x,y,z)\, dx\, dz\, dy$$

Problema 3

Use coordenadas cilindricas

a) Evalúe $\iiint_E x+y+z\,dV$, donde E es el sólido en el primer octante que está bajo el paraboloide $z=4-x^2-y^2$

b) Encuentre el volumen del sólido que está dentro del cilindro $x^2+y^2=1$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=4$

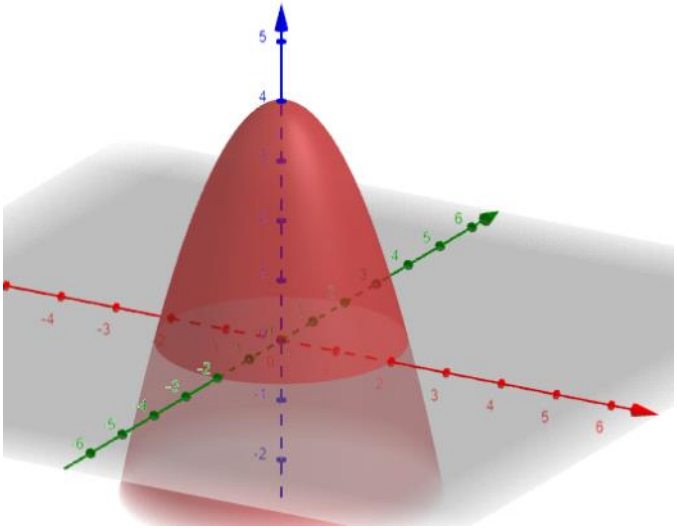
a) El paraboloide intersecta el plano xy en el circulo

$$x^2+y^2=4$$

o (en coordenadas cilindricas)

$$r^2=4$$

$$r=2$$



además el paraboloide en coordenadas cilindricas viene dado por $z=4-r^2$

Entonces

$$E=\{(r,\theta,z)\mid 0\le r\le 2,\ 0\le\theta\le\tfrac{\pi}{2},\ 0\le z\le 4-r^2\}$$

→ piden primer octante

Así

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{4-r^2}(r\cos(\theta)+r\sin(\theta)+z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{4-r^2} r^2\cos(\theta)+r^2\sin(\theta)+zr\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r^2\cos(\theta)z\Big|_0^{4-r^2}+r^2\sin(\theta)\Big|_0^{4-r^2}+\frac{1}{2}rz^2\Big|_0^{4-r^2}\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\int_0^2 (4r^2-r^4)(\cos(\theta)+\sin(\theta))+\frac{1}{2}r(4-r^2)^2\,dr\,d\theta$$

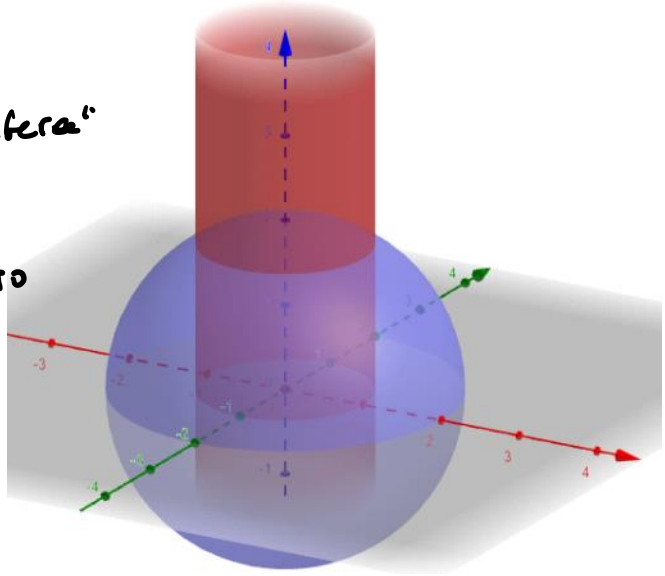
$$= \int_0^{\pi/2} \left[\left(\frac{4}{3} r^3 - \frac{1}{5} r^5 \right) \left(\cos(\theta) + \sin(\theta) - \frac{1}{12} (4 - r^2)^3 \right] \right|_0^2 \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{64}{15} (\cos(\theta) + \sin(\theta)) + \frac{16}{3} \, d\theta$$

$$= \left[\frac{64}{15} (\sin(\theta) - \cos(\theta)) + \frac{16}{3} \theta \right] \Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{8}{3}\pi + \frac{28}{15}$$

b) El solido es como el "cuerpo del cilindro con tapas de la esfera"



En coordenadas cilindricas el cilindro es $r=1$ y la esfera es $r^2+z^2=4$

Entonces

$$E = \{(r,\theta,z) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ -\sqrt{4-r^2} \le z \le \sqrt{4-r^2}\}$$

y el volumen estara dado por la integral

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 rz\Big|_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}}\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\sqrt{4-r^2}\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 2r\sqrt{4-r^2}\,dr$$

$$= 2\pi\left(-\frac{2}{3}(4-r^2)^{3/2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(8-3^{3/2}\right)$$

Problema 4

Evalúe la integral cambiando a coordenadas cilíndricas

$$\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$$

Notamos que $\int_0^{9-x^2-y^2} dz$ nos indica un paraboloide y en el plano xy, $\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} dy\,dx$ nos indica un medio circulo de radio 3

Entonces

$$\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\int_0^3\int_0^{9-r^2}\sqrt{r^2}\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^3\int_0^{9-r^2} r^2\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^3 r^2 z\Big|_0^{9-r^2}\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^3 r^2(9-r^2)\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^3 9r^2 - r^4\,dr$$

$$= \pi\left(3r^3 - \frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^3$$

$$= \pi\left(81 - \frac{243}{5}\right) = \frac{162}{5}\pi$$

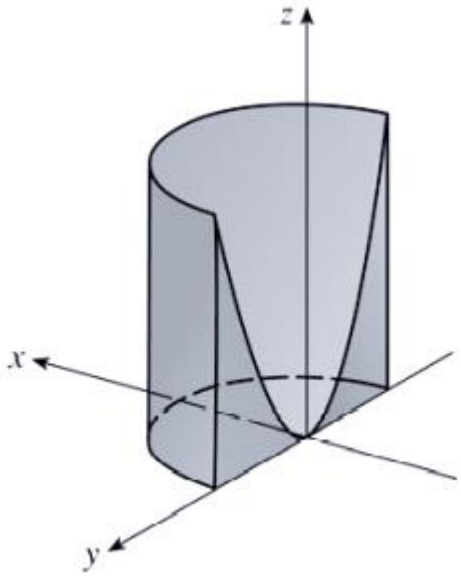
Problema 5

Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral y evalúela

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{r^2} r \, dz \, dr \, d\theta$$

el solido viene determinado por

$E = \{(r,\theta,z) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq z \leq r^2\}$



donde $0 \leq z \leq r^2$ nos muestra una parabola

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq 2$ nos muestra medio cilindro

Entonces integramos

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{r^2} r \, dz \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^3 \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r^3 \, dr$$

$$= \pi \left(\frac{1}{4} r^4 \Big|_0^2 \right)$$

$$= 4\pi$$