Ayudantía 11

isabel.kreimerman@gmail.com



2 Definición La **derivada direccional** de f en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si este límite existe.

3 Teorema Si f es una función derivable de x y de y, entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ y

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b$$

8 Definición Si f es una función de dos variables x y y, entonces el **gradiente** de f es la función vectorial ∇f definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

15 Teorema Supongamos que f es una función derivable de dos o tres variables. El valor máximo de la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ es $|\nabla f(\mathbf{x})|$ y se presenta cuando $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$.

19 $$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

La **recta normal** a S en P es la recta que pasa por P y es perpendicular al plano tangente. La dirección de la recta normal está definida, por lo tanto, por el vector gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ y, de este modo, mediante la ecuación 12.5.3, sus ecuaciones simétricas son

20 $$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Problema 1

La temperatura T en una bola de metal es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de la bola, el cual se considera como el origen. La temperatura en el punto $(1, 2, 2)$ es 120°C.

a) Determine la razón de cambio de T en $(1, 2, 2)$ en la dirección hacia el punto $(2, 1, 3)$.

b) Demuestre que en cualquier punto en la bola la dirección de incremento más grande de temperatura está dado por un vector que apunta hacia el origen.

como es inversamente prop. a la distancia

$$T = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$T(1,2,2) = \frac{k}{3} = 120$$

$$k = 360$$

$$T(x,y,z) = \frac{360}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

a) $\hat{u} = \frac{(2,1,3)}{\|(2,1,3)\|} = \frac{(2,1,3)}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}} = (2,1,3)\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}$

$$\nabla T = -360\,(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\,(x,y,z)$$

$$= \left(\frac{-360x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-360y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-360z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

$$\nabla T(1,2,2) = \left(-\frac{40}{3}, -\frac{80}{3}, -\frac{80}{3}\right)$$

$$D_{\hat{u}} T(1,2,2) = \left(-\frac{40}{3}, -\frac{80}{3}, -\frac{80}{3}\right)\cdot(2,1,3)\frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{400}{3\sqrt{14}}$$

b) La dirección del vector gradiente tiene dirección $-(x,y,z)$ la cual va hacia el origen. Por lo tanto, hacia el origen es la dirección que maximiza el incremento de temperatura

Problema 2

¿En qué puntos la recta normal que pasa por el punto $(1, 2, 1)$ sobre el elipsoide $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 12$ intersecta la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 102$?

Definimos la función del elipse

$$F(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 12$$

su gradiente

$$\nabla F = (8x, 2y, 8z)$$

$\nabla F(1,2,1) = (8,4,8)$ → actúa como vector normal

equivale a $(2,1,2)$

entonces la recta normal en $(1,2,1)$

$$x = 1 + 2t \qquad y = 2 + t \qquad z = 1 + 2t$$

reemplazando estas formulas en la estera (para encontrar la intersección)

$$(1+2t)^2 + (2+t)^2 + (1+2t)^2 = 102$$

$$6 + 12t + 9t^2 = 102$$

$$3(t+4)(3t-8) = 0$$

$$t = -4 \qquad t = 8/3$$

reemplazando en la recta

$t = -4 \longrightarrow (-7, -2, -7)$

$t = 8/3 \rightarrow (19/3, 14/3, 19/3)$

2 Teorema Si f tiene un máximo local o un mínimo local en (a, b) y las derivadas parciales de primer orden de f existen ahí, entonces $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

3 Prueba de la segunda derivada Supongamos que las segundas derivadas parciales de f son continuas sobre un disco de centro (a, b), y supongamos que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, es decir, (a, b) es un punto crítico de f. Sea

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

a) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un mínimo local.

b) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ es un máximo local.

c) Si $D < 0$, entonces $f(a, b)$ no es un máximo local ni un mínimo local.

Problema 3

Supongamos que $(0, 2)$ es un punto crítico de una función g cuyas segundas derivadas son continuas. En cada caso, ¿qué puede decir con respecto a g?

a) $g_{xx}(0,2) = -1, \quad g_{xy}(0,2) = 6, \quad g_{yy}(0,2) = 1.$

b) $g_{xx}(0,2) = -1, \quad g_{xy}(0,2) = 2, \quad g_{yy}(0,2) = -8.$

c) $g_{xx}(0,2) = 4, \quad g_{xy}(0,2) = 6, \quad g_{yy}(0,2) = 9.$

a) $D = -1 \cdot 1 - (6)^2 = -37$ $\quad D < 0$ $\quad \therefore$ punto silla

b) $D = -1 \cdot -8 - (2)^2 = 4$ $\quad D > 0$ y $f_{xx} < 0$ $\quad \therefore$ máximo local

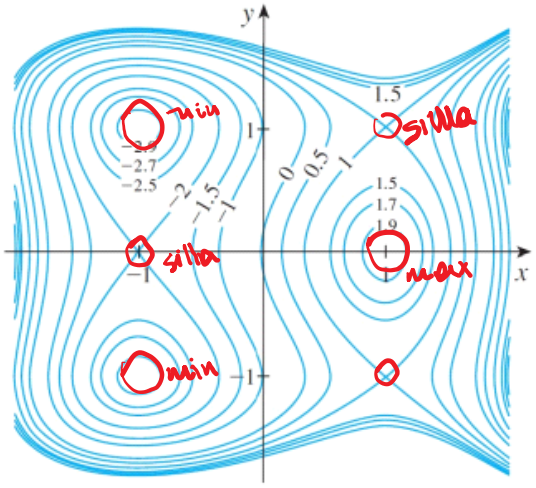
c) $D = 4 \cdot 9 - (6)^2 = 0$ $\quad \therefore$ No tenemos como obtener más info

Problema 4

Utilice las curvas de nivel de la figura para pronosticar la ubicación de los puntos críticos de f y si f tiene un punto silla o un máximo local o un mínimo local en cada uno de esos puntos críticos. Explique su razonamiento. Luego aplique la prueba de la segunda derivada para confirmar su pronóstico.

$$f(x,y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$$

hipotesis



$$f(x,y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$$

$f_x = 3 - 3x^2$
$f_y = -4y + 4y^3$
} buscamos que ambas sean 0 lo que ocurre en los pts $(\pm 1, 0)$, $(\pm 1, \pm 1)$

entonces hay 6 pts criticos

$f_{xx} = -6x$ $\qquad$ $f_{xy} = 0 = f_{yx}$

$f_{yy} = -4 + 12y^2$

$D = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = -72xy^2 + 24x$

entonces para clasificar los 6 puntos

Critical Point	D	f_{xx}	
$(1,0)$	24	-6	$D>0, f_{xx}<0$
$(1,1)$	-48		$D<0$
$(1,-1)$	-48		$D<0$
$(-1,0)$	-24		$D<0$
$(-1,1)$	48	6	$D>0, f_{xx}>0$
$(-1,-1)$	48	6	$D>0, f_{xx}>0$

máximo local

silla

silla

silla

mínimo local

mínimo local

Problema 5

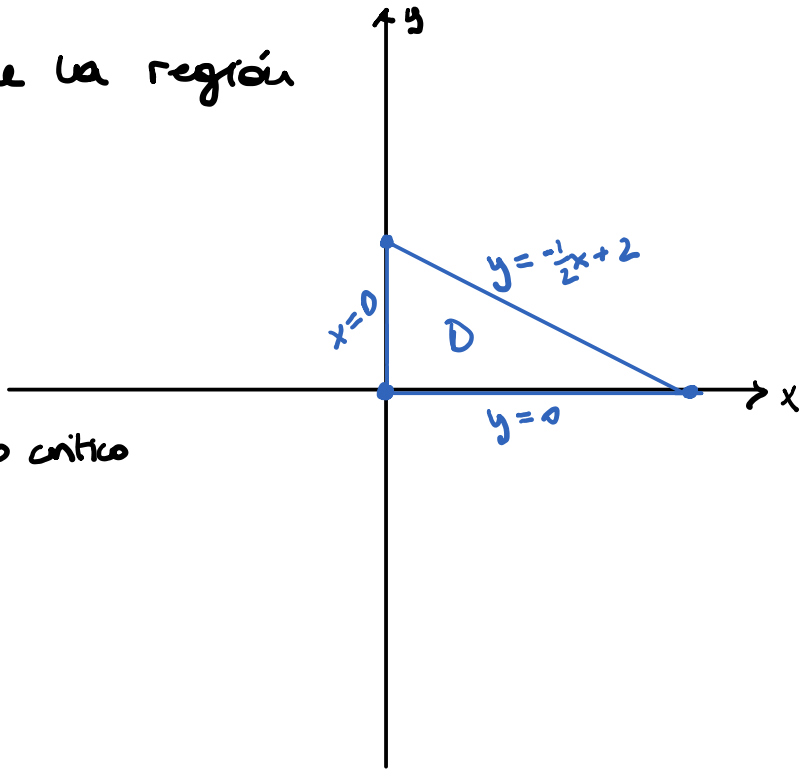
Determine los valores máximos y mínimos absolutos de f sobre el conjunto D.

a) $f(x,y) = x + y - xy$, D es la región triangular cerrada con vértices $(0,0)$, $(0,2)$ y $(4,0)$

Primero, buscamos dentro de la región

$f_x = 1 - y \qquad f_y = 1 - x$

$f_x = 0 = 1 - y \rightarrow y = 1$
$f_y = 0 = 1 - x \rightarrow x = 1$
$\Big\} (1,1)$ ↳ punto crítico



En los bordes

$y = 0 \longrightarrow f(x,0) = x$ (1) $\xrightarrow{\frac{d}{dx}}$

$x = 0 \longrightarrow f(0,y) = y$ (1) $\xrightarrow{\frac{d}{dy}}$

$y = 2 - \frac{1}{2}x \longrightarrow f(x, 2-\frac{1}{2}x) = x + 2 - \frac{1}{2}x - x(2 - \frac{1}{2}x)$

$= x + 2 - \frac{1}{2}x - 2x + \frac{1}{2}x^2$

$= 2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2$

$f'(x) = -\frac{3}{2} + x$

$x = 3/2 \qquad y = \frac{5}{4} \qquad (\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$

Comparamos $x+y-xy$

$f(1,2) = 1$ → interior

$f\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right) = 7/8$ → bordes

$f(0,0) = 0$

$f(0,2) = 2$ } vertices

$f(4,0) = 4$

∴ max absoluto es 4 y min abs es 0

Problema 6

Encuentre los puntos sobre el cono $z^2 = x^2 + y^2$ más cercanos al punto $(4, 2, 0)$.

Sea d la función de distancia:

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2}$$ pero $z^2 = x^2 + y^2$ por el cono

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + x^2 + y^2}$$

vamos a minimizar d^2 porque es más fácil

$$f(x,y) = (x-4)^2 + (y-2)^2 + x^2 + y^2$$

$$f_x = 2(x-4) + 2x = 4x - 8$$
$$f_y = 2(y-2) + 2y = 4y - 4$$

} igualando a 0 buscamos los puntos críticos

$x = 2 \quad y = 1$ → único punto crítico

entonces el punto del cono mas cercano a $(4,2,0)$ es

$(2, 1, \pm\sqrt{5})$

Método de los multiplicadores de Lagrange Para determinar los valores máximos y mínimos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$ [suponiendo que estos valores existan y que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ se encuentre en la superficie $g(x, y, z) = k$]:

a) Determine todos los valores de x, y, z y λ tales que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

y

$$g(x, y, z) = k$$

b) Evalúe f en todos los puntos (x, y, z) que resulten del paso a). El más grande de estos valores es el valor máximo de f, el más pequeño es el valor mínimo de f.

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)$$

Problema 7

Utilizando multiplicadores de Lagrange, encuentre los valores máximo y mínimo de la función sujeta a la restricción o las restricciones dadas.

a) $f(x,y,z) = xyz, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

$$\nabla f = (yz, xz, xy) \qquad \nabla g = (2x, 4y, 6z)$$

$$(yz, xz, xy) = \lambda(2x, 4y, 6z)$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$$

El sistema:

$$yz = 2\lambda x \quad (1)$$

$$xz = 4\lambda y \quad (2)$$

$$xy = 6\lambda z \quad (3)$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \quad (4)$$ descartando que $x = y = z = 0$

$$\lambda = \underset{(1)}{\frac{yz}{2x}} = \underset{(2)}{\frac{xz}{4y}} = \underset{(3)}{\frac{xy}{6z}}$$

$$4y^2 = 2x^2 \qquad 6z^2 = 4y^2$$

$$x^2 = 2y^2 \quad (5) \qquad z^2 = \frac{2}{3}y^2 \quad (6)$$

$$2y^2 + 2y^2 + 3 \cdot \frac{2}{3}y^2 = 6 \qquad (5) \text{ y } (6) \text{ en } (4)$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$z = \pm\sqrt{2/3}$$

Buscamos el min y el maximo

$$(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2/3}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$(\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2/3}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$(-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2/3}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$(-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2/3}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$(\sqrt{2}, -1, \sqrt{2/3}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$(\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2/3}) = +\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$(-\sqrt{2}, -1, \sqrt{2/3}) = +\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$(-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2/3}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

entonces, el minimo es $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

el maximo es $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Problema 8

Considere el problema de maximizar la función $f(x,y) = 2x+3y$ sujeta a la restricción $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 5$.

a) Intente usando multiplicadores de Lagrange para resolver el problema.

b) ¿$f(25,0)$ da un valor mayor que el del inciso a?

c) Resuelva el problema graficando la ecuación de restricción y varias curvas de nivel de f.

d) Explique por qué el método de multiplicadores de Lagrange no resuelve el problema.

e) ¿Cuál es la importancia de $f(9,4)$?

a) $\nabla f = (2,3)$ $\quad \nabla g = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{2\sqrt{y}}\right)$

$$(2,3) = \lambda\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{2\sqrt{y}}\right)$$
$$\sqrt{x}+\sqrt{y} = 5$$

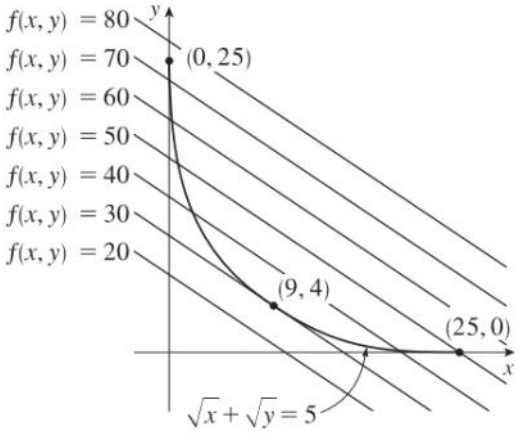
Resolviendo, se obtiene que el unico pto. critico es

$(9,4)$

$f(9,4) = 30$ ¿sera el maximo?

b) $f(25,0) = 50$ (mayor que en el inciso a)

c)



Podemos ver en la grafica (por las curvas de nivel) que el valor maximo se da en un extremo de la curva de restricción

$f(0,25) \approx 75 \rightarrow$ maximo

d) Notamos que en este caso ∇g NO existe si $x=0$ o $y=0$

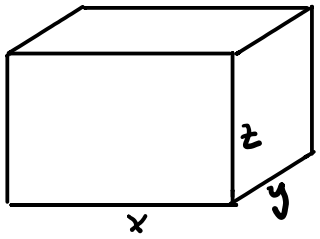
e) $f(9,4)$ es un mínimo absoluto

Problema 9

Determine los volúmenes máximo y mínimo de una caja rectangular cuya área superficial es de $1500cm^2$ y cuyo largo total de las aristas es de $200cm$.

Buscamos el maximo volumen

$$V(x,y,z) = xyz$$



con las restricciones

$$2xy + 2xz + 2yz = 1500 \longleftrightarrow xy + xz + yz = 750$$

$$4x + 4y + 4z = 200 \longleftrightarrow x + y + z = 50$$

entonces

$$\nabla f = (yz, xz, xy)$$

$$\nabla g = (y+z, x+z, x+y)$$

$$\nabla h = (1,1,1)$$

$$(yz, xz, xy) = \lambda(y+z, x+z, x+y) + \mu(1,1,1)$$

$$xy + xz + yz = 750$$

$$x + y + z = 50$$

$$yz = \lambda(y+z) + \mu \quad (1)$$

$$xz = \lambda(x+z) + \mu \quad (2)$$

$$xy = \lambda(x+y) + \mu \quad (3)$$

$$xy + xz + yz = 750 \quad (4)$$

$$x + y + z = 50 \quad (5)$$

Notamos que la caja no puede ser un cubo porque no se cumplirían las restricciones

$$x = y = z = \frac{50}{3}$$

$$xy + yz + xz = \frac{2500}{3} \neq 750$$

suponiendo que x es el lado distinto tal que

$$x \neq z \ , \ x \neq y$$

resolviendo el sistema considerando eso:

(1) − (2) $\quad z(y-x) = \lambda(y-x)$

$$z = \lambda$$

(1) − (3) $\quad y(z-x) = \lambda(z-x)$

$$y = \lambda$$

Así $y = \lambda = z$ en (5) $x = 50 - 2\lambda$

reemplazando en (4) $\quad x(2\lambda) + \lambda^2 = 750$

$$3\lambda^2 - 100\lambda + 750 = 0$$

$$\lambda = \frac{50 \pm 5\sqrt{10}}{3}$$

lo que da los puntos

$$\left(\frac{1}{3}(50 \mp 10\sqrt{10}),\ \frac{1}{3}(50 \pm 5\sqrt{10}),\ \frac{1}{3}(50 \pm 5\sqrt{10})\right)$$

y el maximo es $\frac{1}{27}(87\,500 + 2500\sqrt{10})$

y el minimo es $\frac{1}{27}(87\,500 - 2500\sqrt{10})$