1) Modelamos las restricciones

$$g(x,y,z) = x + y - z \quad ; \quad h(x,y,z) = x^2 + 2z^2 - 1$$

obtenemos los gradientes

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \nabla g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla h = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ 4z \end{pmatrix}$$

planteamos los multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$
$$g = 0$$
$$h = 0$$

$$\Rightarrow$$

i) $3 = \lambda + 2\mu x$

ii) $-1 = \lambda$

iii) $-3 = -\lambda + 4\mu z$

iv) $x + y = z$

v) $x^2 + 2z^2 = 1$

De (i), (ii) y (iii) extraemos que $x = -2z$, reemplazando en (v) tenemos que

$$(-2z)^2 + 2z^2 = 1$$

$$4z^2 + 2z^2 = 1$$

$$6z^2 = 1$$

$$z = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Si $z = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ entonces $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$ y por (iv) $y = -\frac{\sqrt{6}}{2}$. Despejando para $z = \sqrt{6}/6$, nuestros puntos de interes son

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

Evaluando

$$f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$$ ↩ máximo

$$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -\sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} = -2\sqrt{6}$$ ↩ mínimo

1. b) Modelamos las restricciones

$$g(x,y,z) = x - y - 1 \quad , \quad h(x,y,z) = y^2 - z^2 - 1$$

Obtenemos los gradientes

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad , \quad \nabla g = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \nabla h = \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix}$$

planteamos las ecuaciones

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$
$$g = 0$$
$$h = 0$$

$\Rightarrow$

i) $2x = \lambda$

ii) $2y = -\lambda + 2\mu y$

iii) $2z = -2\mu z$

iv) $x - y = 1$

v) $y^2 - z^2 = 1$

Suponiendo que $z \neq 0$, de (iii) tenemos que $\mu = -1$, lo que implica (por (ii)) que $4y = -\lambda$. Reemplazando en (i) tenemos que $x = -2y$, por (iv) tenemos que $y = -1/3$. Utilizando (v) llegamos a que $z^2 = -8/9$ lo cual es un sin sentido.

Por lo que necesariamente $z = 0$, por (v) tenemos que $y = \pm 1$, luego los puntos críticos son

$$(2, 1, 0) \quad , \quad (0, -1, 0)$$
$$\lambda = 4, \ \mu = 3 \qquad \lambda = 0, \ \mu = 1$$

Evaluando tenemos lo siguiente

$$f(2,1,0) = 4 + 1 + 0 = 5$$ ↙ máximo

$$f(0,-1,0) = 0 + 1 + 0 = 1$$ ↙ mínimo

2) La distancia se puede modelar como la siguiente función

$$r(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

la cual queremos maximizar, lo que es equivalente a maximizar la siguiente función

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

planteamos las restricciones

$$g(x,y,z) = x + y + 2z - 2, \quad h(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$$

obtenemos los gradientes

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \qquad \nabla g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \nabla h = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix}$$

planteamos las ecuaciones

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

$$g = 0$$

$$h = 0$$

$$\Rightarrow$$

i) $2x = \lambda + 2\mu x$

ii) $2y = \lambda + 2\mu y$

iii) $2z = 2\lambda - \mu$

iv) $x + y + 2z = 2$

v) $x^2 + y^2 = z$

Suponiendo que $\lambda \neq 0$, de (i) y (ii) tenemos que $x = y$, de (v) obtenemos que $2x^2 = z$, reemplazando en (iv) obtenemos que $2x + 4x^2 = 2$. de lo cual obtenemos

$$x = -1, \quad x = \frac{1}{2}$$

De esto obtenemos los siguientes puntos

$$(-1, -1, 2) \quad , \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

evaluando

$$f(-1, -1, 2) = 1 + 1 + 4 = 6$$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

Suponiendo ahora que $\lambda = 0$, por (i) y (ii) tenemos que $\mu = 1$, por (iii) sabemos que $z = \frac{-1}{2}$. reemplazando en (v) nos queda

$$x^2 + y^2 = \frac{-1}{2}$$

lo cual es un sin sentido. Concluimos que el máximo es 6 y el mínimo es $^3/_4$.

3.a) Formulamos el problema de maximizacion

$$\max \left(\frac{1}{2}\sqrt{K} + \frac{1}{2}\sqrt{L}\right)^2$$

$$\text{s.a.} \quad K + \frac{1}{3}L = 10.000$$

3. b) Queremos maximizar $Q(K, L)$. por simplicidad notamos que esto es equivalente a maximizar la siguiente funcion

$$f(K, L) = \sqrt{K} + \sqrt{L}$$

modelamos la restriccion.

$$g(K, L) = K + \frac{1}{3}L - 10.000$$

obtenemos los gradientes

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{K} \\ 2/\sqrt{L} \end{pmatrix} \qquad \nabla g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

planteamos las ecuaciones

$$\nabla f = \lambda \nabla g \qquad g = 0$$

$$\Rightarrow \quad i) \ \frac{2}{\sqrt{K}} = \lambda$$

$$ii) \ \frac{2}{\sqrt{L}} = \frac{\lambda}{3}$$

$$iii) \ K + \frac{1}{3}L = 10.000$$

de (i) y (ii) obtenemos que $L = 9K$, reemplazando en (iii) obtenemos que $K = 2.500$, lo cual nos deja el siguiente punto de interes

$$(2.500, 22.500)$$

3. c) el valor máximo de producción esta dado por

$$Q(2.500, 22.500) = 10.000$$

que se logra con 2.500 unidades de capital y 22.500 unidades de trabajo.